

Aufgabe 1:

Man beschreibe das algebraische Tensorprodukt $\mathbb{C}^n \odot \mathbb{C}^m$. Was ergibt sich für die Tensorprodukte $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$ von Hilberträumen bzw. $\mathbb{C}^n \otimes_{\min} \mathbb{C}^m$ von C^* -Algebren?

Aufgabe 2:

Sei \mathcal{H} ein Hilbertraum und $p \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})$ eine Projektion. Ist p notwendigerweise von der Form $e \otimes f$ für $e, f \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$?

Aufgabe 3:

Seien $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ Hilberträume. Man zeige, dass die kanonische Abbildung

$$\iota : \mathcal{B}(\mathcal{H}_1) \odot \mathcal{B}(\mathcal{H}_2) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$$

aus Bemerkung 1.6 wohldefiniert ist. (Insbesondere ist also zu zeigen, dass elementare Tensoren in $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1) \odot \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ beschränkte Operatoren auf $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ induzieren.)

Aufgabe 4:

Seien A, B C^* -Algebren. Man zeige, dass

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i \right\|_{\min} := \sup \left\{ \left\| (\pi_A \otimes \pi_B) \left(\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i \right) \right\| \mid \pi_A, \pi_B \text{ Darstgn. von } A, B \right\}$$

die C^* -Gleichung erfüllt.

Aufgabe 5:

Man zeige: \otimes_{\max} und \otimes_{\min} sind assoziativ und kommutativ.