7. Der Funktor $K_0(.)$

7.1 Def.: Sei A eine nichtunitale C^*-Algebra; betrachte die zerfallende exakte Sequenz

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\iota"] & A^+ \arrow[r, "\pi"] & \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[l, bend right, "\sigma"'] & 0 \end{tikzcd}$$

und die induzierte Abbildung $K_0(\pi) : K_0(A^+) \to K_0(\mathbb{C})$.
Wir definieren $K_0(A) := \ker K_0(\pi) \subset K_0(A^+)$.
(Damit ist $K_0(A)$ eine abelsche Gruppe.)

7.2 Bem.: (i) Für $p \in P_\infty(A)$ gilt für $[p]_0 \in K_0(A^+)$
$K_0(\pi)([p]_0) = [\pi(p)]_0 = 0$, d. h. $[p]_0 \in K_0(A)$
und wir dürfen $[\,.\,]_0 : P_\infty(A) \to K_0(A)$ schreiben.

(ii) Sei A eine beliebige C^*-Algebra (unital oder nicht).
Wir haben eine exakte Sequenz

$$0 \to K_0(A) \xrightarrow{\kappa} K_0(A^+) \to K_0(\mathbb{C}) \to 0$$ [warum?]

wo $\kappa = K_0(\iota)$ ist falls A unital ist (vgl. 6.15)
und κ die Inklusion ist falls A nichtunital ist.

$$A \text{ unital} \Rightarrow K_0(A) \cong K_0(\iota)(K_0(A)) \subset K_0(A^+)$$

$$\underset{\in K_0(A)}{[p]_0} \longmapsto \underset{\in K_0(A^+)}{[p]_0}$$

$\Rightarrow K_0(A) \overset{6.15}{=} \ker K_0(\pi)$ auch im unitalen Fall.

7.3 Seien A, B C^*-Algebren und $\varphi: A \to B$ ein $*$-Hom.
~~[illegible]~~ mit Unitalisierung $\varphi^+: A^+ \to B^+$.

$$\rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & A^+ \arrow[r, "\pi_A"] \arrow[d, "\varphi^+"] & \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B \arrow[r] & B^+ \arrow[r, "\pi_B"] & \mathbb{C} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \qquad (*)$$

$$\rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K_0(A) \arrow[r] \arrow[d, "\exists!\, K_0(\varphi)"] & K_0(A^+) \arrow[r] \arrow[d, "K_0(\varphi^+)"] & K_0(\mathbb{C}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K_0(B) \arrow[r] & K_0(B^+) \arrow[r] & K_0(\mathbb{C}) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \qquad (**)$$

$$K_0(\varphi) = K_0(\varphi^+)\big|_{K_0(A)} \qquad (***)$$

Falls A, B unital sind, so gilt $\varphi^+ \circ \iota_A = \iota_B \circ \varphi: A \to B^+$ und die Definition von $K_0(\varphi)$ aus $(**)$ stimmt nach der Identifikation $K_0(B) = \iota(K_0(B))$ mit der aus 6.11 überein.

In jedem Fall gilt für $p \in P_\infty(A)$ $K_0(\varphi)([p]_0) = [\varphi(p)]_0$.

Prop.: Seien A, B, C C^*-Algebren und $\varphi: A \to B$, $\psi: B \to C$ $*$-Hom.

(i) $K_0(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{K_0(A)}$

(ii) $K_0(\psi \circ \varphi) = K_0(\psi) \circ K_0(\varphi)$

(iii) $K_0(0_{A \to B}) = 0_{K_0(A) \to K_0(B)}$

(iv) $K_0(\{0\}) = \{0\}$.

Insbesondere ist K_0 ein kovarianter Funktor $(C^*\text{-Alg}, *\text{-Hom}) \to (\mathrm{AB}, \mathrm{Hom})$.

Bew.: (i) Es gilt $\mathrm{id}_A^{\,+} = \mathrm{id}_{A^+}$, also

$$K_0(\mathrm{id}_A) \overset{(\ast\ast)}{=} K_0(\mathrm{id}_A^{\,+})|_{K_0(A)} = K_0(\mathrm{id}_{A^+})|_{K_0(A)} \overset{\text{Prop. 6.11 (i)}}{=} \mathrm{id}_{K_0(A^+)}|_{K_0(A)} = \mathrm{id}_{K_0(A)}$$

(ii) Ebenso, mit $(\psi \circ \varphi)^+ = \psi^+ \circ \varphi^+$.

(iii) $\varphi = 0_{A \to B}$ in $(\ast)$ $\Rightarrow$ φ^+ faktorisiert durch π_A

$\Rightarrow K_0(\varphi^+)$ faktorisiert durch $K_0(\pi_A)$

$\Rightarrow K_0(\varphi) = K_0(\varphi^+)|_{K_0(A)} = 0$.

(iv) $\{0\}^+ \cong \mathbb{C}$ und wir erhalten

$\cancel{\{0\} \to \{0\}^+}$ $\quad 0 \to 0 \to \mathbb{C} \xrightarrow[=]{\pi} \mathbb{C} \to 0$

$$\rightsquigarrow \quad K_0(\{0\}) \to K_0(\mathbb{C}) \xrightarrow{\mathrm{id}} K_0(\mathbb{C}) \to 0$$

$$K_0(\{0\}) = \ker \mathrm{id}_{K_0(\mathbb{C})} = \{0\}$$

$\square$

7.4 <u>Prop:</u> Seien A, B C^*-Algebren.

(i) Falls $\varphi \sim_h \psi : A \to B$ homotope $*$-Homomorphismen sind, so gilt $K_0(\varphi) = K_0(\psi)$.

(ii) Falls A und B homotopieäquivalent sind via $A \xrightarrow{\varsigma} B \xrightarrow{\sigma} A$, so sind $K_0(\varsigma)$ und $K_0(\sigma)$ zueinander inverse Isomorphismen.

Beweis: (i) $\underset{[\text{via } (\varphi_t)_t]}{\varphi \sim_h \psi} \Rightarrow \underset{[\text{via } (\varphi_t^+)_t]}{\varphi^+ \sim_h \psi^+}$

Nach Prop. 6.13 (i) gilt $K_0(\varphi^+) = K_0(\psi^+)$ und wir haben $K_0(\varphi) = K_0(\varphi^+)|_{K_0(A)} = K_0(\psi^+)|_{K_0(A)} = K_0(\psi)$.

(ii) folgt aus (i) mit Prop. 7.3 (i), (ii). □

7.5 <u>z.B.:</u> $CA := \{ f \in C([0,1], A) \mid f(0) = 0 \} = C_0((0,1], A)$ ist homotop zu 0 [via $CA \to 0 \to CA$]:

$F = \varphi_t : CA \to CA$, $\varphi_t(f)(s) := f(st)$ gilt $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = \mathrm{id}_{CA}$.

$\overset{7.4}{\Rightarrow} K_0(CA) = 0$

Wir werden sehen, dass $SA := C_0((0,1), A)$ i.a. nicht-triviale K-Theorie hat.

$0 \to SA \to CA \to A \to 0 \rightsquigarrow K(\ldots)$?

7.6 Betrachte $0 \to A \xrightarrow{\iota} A^+ \underset{\sigma}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} \mathbb{C} \to 0$

und definiere $s_A : A^+ \to A^+$, $s_A := \sigma \circ \pi$,

dann gilt $\pi s_A(a) = \pi(a)$ und ~~$a - s(a)$~~ $a - s_A(a) \in \overbrace{A}^{\ker \pi}$, $a \in A^+$.

s_A induziert $s_A^{(n)} : M_n(A^+) \to M_n(A^+)$; im $s_A^{(n)} = M_n(\mathbb{C} \cdot 1_{A^+})$

Falls $\varphi : A \to B$ ein *-Hom ist, so kommutiert

$$\begin{tikzcd} A^+ \arrow[r, "s_A"] \arrow[d, "\varphi^+"'] & A^+ \arrow[d, "\varphi^+"] \\ B^+ \arrow[r, "s_B"] & B^+ \end{tikzcd}$$

Wir schreiben oft s für $s_A^{(n)}$.

<u>Prop. 1</u> Für jede C*-Algebra A gilt:

(i) $K_0(A) = \{ [p]_0 - [s(p)]_0 \mid p \in P_\infty(A^+) \}$

(ii) Für $p, q \in P_\infty(A^+)$ sind äquivalent:

a) $[p]_0 - [s(p)]_0 = [q]_0 - [s(q)]_0$

b) $\exists\, k, l \in \mathbb{N}$: $p \oplus 1_k \sim_0 q \oplus 1_l$ in $P_\infty(A^+)$.

c) $\exists\, v_1, v_2 \in P_n(\mathbb{C} \cdot 1_{A^+})$: $p \oplus v_1 \sim_0 q \oplus v_2$ in $P_\infty(A^+)$.

(iii) Für jedes $p \in P_\infty(A^+)$ mit $[p]_0 - [s(p)]_0 = 0$ existiert $m \in \mathbb{N}$ mit $p \oplus 1_m \sim_0 s(p) \oplus 1_m$.

Bew.: (i) "$\supseteq$": Für $p \in P_\infty(A^+)$ gilt

$$K_0(\pi)\left([p]_0 - [s(p)]_0\right) = [\pi(p)]_0 - [\pi s(p)]_0 = 0$$

[denn $\pi s = \pi$]

~~$\Rightarrow \{[p]_0 - [s(p)]_0 \mid p \in P_\infty(A^+)\} \subseteq$~~

$$\Rightarrow K_0(A) = \ker K_0(\pi) \supseteq \{[p]_0 - [s(p)]_0 \mid p \in P_\infty(A^+)\}.$$

"$\subseteq$": Falls $x \in K_0(A)$, existieren $n \in \mathbb{N}$ und $e, f \in P_n(A^+)$ mit $x = [e]_0 - [f]_0$.

Setze $p := e \oplus (1_n - f)$, $q = 0_n \oplus 1_n \in P_{2n}(A^+)$,

dann gilt $[p]_0 - [q]_0 = [e]_0 + [1_n - f]_0 - [1_n]_0$

$= [e]_0 - [f]_0$ [denn $[1_n - f]_0 + [f]_0 = [1_n]_0$]

$= x$

Es gilt $q = s(q)$ und $K_0(\pi)(x) = 0$

$$\Rightarrow [s(p)]_0 - [q]_0 = [s(p)]_0 - [s(q)]_0$$
$$= K_0(s)(x)$$
$$= K_0(\sigma) \circ K_0(\pi)(x)$$
$$= 0$$

$$\Rightarrow x = [p]_0 - [q]_0 = [p]_0 - [s(p)]_0$$

$\Rightarrow$ "$\subseteq$".

(ii) a) $\Rightarrow$ c): $[p]_0 - [s(p)]_0 = [q]_0 - [s(q)]_0$

$\Rightarrow [p \oplus s(q)]_0 = [q \oplus s(p)]_0$

$\overset{\text{Bsp. 6.8(i)}}{\Rightarrow} p \oplus s(q) \oplus 1_n \sim_0 q \oplus s(p) \oplus 1_n$

$\Rightarrow$ c) für ein $n \in \mathbb{N}$

c) $\Rightarrow$ b): $v_1, v_2 \in P_1(\mathbb{C} \cdot 1_{A^+})$

$\Rightarrow v_1 \sim_0 1_k,\ v_2 \sim_0 1_l$

für $k, l \in \mathbb{N}$ geeignet

b) $\Rightarrow$ a): Es gilt $[p]_0 - [s(p)]_0 = [p \oplus 1_k]_0 - [s(p \oplus 1_k)]_0$ ebenso für q, daher genügt es, $k = l = 0$ anzunehmen; ebenso dürfen wir $p, q \in P_n(A^+)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ annehmen.

$p \sim_0 q \Rightarrow p \sim_{U,N} q$

$\Rightarrow p = v^* v,\ q = v v^*$ für $v \in M_n(A^+)$

$\Rightarrow s(p) = s(v)^* s(v),\ s(q) = s(v) s(v)^*$

$\Rightarrow s(p) \sim_0 s(q)$

$\Rightarrow$ a).

(iii) $[p]_0 - [s(p)]_0 = 0 \overset{6.8(ii)}{\Rightarrow} p \sim_s s(p) \overset{6.8(i)}{\Leftrightarrow} p \oplus 1_n \sim_0 s(p) \oplus 1_n$.

$\square$

7.7 Prop.: Seien A, B C*-Algebren und $\varphi: A \to B$ ein *-Hom.

(i) Es gilt $K_0(\varphi)\left([p]_0 - [s_A(p)]_0\right) = [\varphi^+(p)]_0 - [s_B\varphi^+(p)]_0$, für $p \in P_\infty(A^+)$.

(ii) Für $x \in \ker(K_0(\varphi)) \subset K_0(A)$ existieren $n \in \mathbb{N}$, $p \in P_n(A^+)$ und $u \in \mathcal{U}(M_n(B^+))$ so dass $x = [p]_0 - [s_A(p)]_0$ und $u\varphi^+(p)u^* = s_B\varphi^+(p)$. Falls φ surjektiv ist, so darf man $u = 1$ annehmen.

Bew. (i) folgt aus 7.6(i) und Prop. 7.3 mit $s_B\varphi^+ = \varphi^+ s_A$.

(ii) Benutze 7.6(ii) und Prop. 6.8. ∎

φ surjektiv $\leadsto$ ersetze p durch $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und u durch $\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}$,

$\leadsto \exists\, v \in \mathcal{U}(M_{2n}(A^+))$ mit $\varphi^{+(2n)}(v) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}$ $[\sim_h 1_{2n}]$

[und $v \sim_h 1_{2n}$] $\leadsto$ Ersetze p durch vpv^*. [illegible] □

7.8 <u>Prop.</u>: Sei

$$0 \to J \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} B \to 0 \quad (*)$$

eine kurze exakte Sequenz von C^*-Algebren. Dann ist

$$K_0(J) \xrightarrow{K_0(\iota)} K_0(A) \xrightarrow{K_0(\pi)} K_0(B) \quad (**)$$

exakt.

Falls $(*)$ zerfällt mit $\sigma : B \to A$, $\sigma\pi = id_B$, so ist

$$0 \to K_0(J) \xrightarrow{K_0(\iota)} K_0(A) \underset{K_0(\pi)}{\overset{K_0(\sigma)}{\leftrightarrows}} K_0(B) \to 0 \quad (***)$$

exakt und zerfällt.

Bew. (i) Es gilt $K_0(\pi)\circ K_0(\iota) = K_0(\pi\circ\iota) = 0$, d.h. $\operatorname{im} K_0(\iota) \subset \ker K_0(\pi)$.
Sei nun $x \in \ker K_0(\pi)$. Nach Prop. 7.7(ii) existieren $n \in \mathbb{N}$ und $p \in P_n(A^+)$ so dass $x = [p]_0 - [s_A^{(n)}(p)]_0$ und $\pi^{+(n)}(p) = s_B \circ \pi^{+(n)}(p)$.
Aber dann gilt $\pi^{+(n)}(p) \in \sigma_B^{(n)}(M_n)$ $[\sigma_B : M_n \to M_n(B^+)]$

$$\Rightarrow \quad p \in \sigma_A^{(n)}(M_n) + \ker(\pi^+)^{(n)} = \sigma_A^{(n)}(M_n) + \iota^{(n)}(M_n(J))$$

$$= (\iota^+)^{(n)}(M_n(J^+))$$

$$\Rightarrow \exists\, e \in P_n(J^+) : (\iota^+)^{(n)}(e) = p \qquad \text{injektiv}$$

$$\Rightarrow x = [\iota^{+(n)}(e)]_0 - [s_A^{(n)}\, \iota^{+(n)}(e)]_0$$

$$= [\iota^{+(n)}(e)]_0 - [\iota^{+(n)}\, s_J^{(n)}(e)]_0$$

$$= K_0(\iota)([e]_0 - [s_J^{(n)}(e)]_0) \in \operatorname{im} K_0(\iota).$$

$\Rightarrow (**)$ ist exakt.

(ii) $(***)$ ist exakt in der Mitte.
$K_0(\pi)\, K_0(\sigma) = K_0(\pi\sigma) = K_0(id_B) \Rightarrow K_0(\pi)$ ist surjektiv.
$\Rightarrow (***)$ ist exakt bei $K_0(B)$ und zerfällt.

Sei nun $x \in \ker K_0(\iota)$. Nach Prop. 7.7(ii) existieren $n \in \mathbb{N}$, $p \in P_n(J^+)$ und $u \in M_n(A^+)$ mit mit $x = [p]_0 - [s_J(p)]_0$ und $u\,\iota^+(p)\,u^* = s_A\,\iota^+(p)$.

Setze $v := \sigma^+ \circ \pi^+(u^*)\,u$, dann gilt $\pi^+(v) = 1_{M_n(B^+)} = s_B\,\pi^+(v)$.

Wie in (i) sieht man: $\exists\, w \in \mathcal{U}(M_n(J^+))$: $\iota^+(w) = v$.

Dann gilt

$$\iota^+(w p w^*) = v\,\iota^+(p)\,v^* = \sigma^+\pi^+(u^*)\,u\,\iota^+(p)\,u^*\,\sigma^+\pi^+(u)$$

$$= \sigma^+\pi^+(u^*)\; s_A\,\iota^+(p)\; \sigma^+\pi^+(u)$$

$$\underset{[\sigma^+\pi^+|_{\operatorname{im} s_A} = \mathrm{id}]}{=} \sigma^+\pi^+\left(u^*\; s_A\,\iota^+(p)\,u\right) = \sigma^+\pi^+\left(\iota^+(p)\right)$$

$$= s_A\,\iota^+(p) = \iota^+ s_J(p)$$

$$\overset{\iota^+ \text{ injektiv}}{\Rightarrow} \quad w p w^* = s_J(p)$$

$$\Rightarrow \quad p \sim_u s_J(p) \text{ in } M_n(J^+)$$

$$\Rightarrow \quad x = 0.$$

$\Rightarrow$ $K_0(\iota)$ ist injektiv

$\Rightarrow$ $(**)$ ist exakt bei $K_0(J)$. □

7.9 Cor.: Für C^*-Algebren A, B gilt $K_0(A \oplus B) \cong K_0(A) \oplus K_0(B)$.

Bew.: Die zerfallende exakte Folge $0 \to A \xrightarrow{\iota_A} A \oplus B \underset{\iota_B}{\overset{\pi_B}{\rightleftarrows}} B \to 0$ gibt

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_0(A) \arrow[r, "K_0(\iota_A)"] \arrow[d, equal] & K_0(A \oplus B) \arrow[r, shift left, "K_0(\pi_B)"] & K_0(B) \arrow[r] \arrow[l, shift left, "K_0(\iota_B)"] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_0(A) \arrow[r] & K_0(A) \oplus K_0(B) \arrow[r] \arrow[u, "K_0(\iota_A)+K_0(\iota_B)"] & K_0(B) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Die obere Zeile ist exakt und $0 \to K_0(A) \to K_0(A) \oplus K_0(B) \to K_0(B) \to 0$ ist ebenfalls exakt.

Das Diagramm kommutiert und $K_0(\iota_A) + K_0(\iota_B)$ ist ein Isom. nach dem 5-Lemma. □

7.10 z.B.: (i) $0 \to K_0(A) \to K_0(A^+) \rightleftarrows K_0(\mathbb{C}) \to 0 \Rightarrow K_0(A^+) \cong K_0(A) \oplus \mathbb{Z}$

(ii) $K_0(C_0((0,1))) \xrightarrow{K_0(\iota)} K_0(C([0,1])) \xrightarrow{K_0(\pi)} K_0(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}) \Rightarrow K_0(\pi)$ i.a. nicht surjektiv

$K_0(C([0,1])) \cong \mathbb{Z}$, $\quad K_0(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

(iii) $\mathcal{K} = \mathcal{K}(H)$: $K_0(\mathcal{K}(X)) \xrightarrow{K_0(\iota)} K_0(\mathcal{B}(X)) \to K_0(\mathcal{B}(X)/\mathcal{K}(X)) \Rightarrow K_0(\iota)$ i.a. nicht injektiv

$K_0(\mathcal{K}(X)) \cong \mathbb{Z}$ [später], $\quad K_0(\mathcal{B}(X)) = 0$

7.11 Prop.: Sei A ein C^*-Algebra und $\iota_{n,A}: A \to M_n(A)$, $a \mapsto \begin{pmatrix} a & \\ & 0 \end{pmatrix}$.

Dann ist $K_0(\iota_{n,A}): A \to M_n(A)$ ein Isomorphismus.

Beweis: Wir haben

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & K_0(A) & \to & K_0(A^+) & \to & K_0(\mathbb{C}) & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle K_0(\iota_{n,A})} & & \downarrow{\scriptstyle K_0(\iota_{n,A^+})} & & \downarrow{\scriptstyle K_0(\iota_{n,\mathbb{C}})} & & \\ 0 & \to & K_0(M_n(A)) & \to & K_0(M_n(A^+)) & \to & K_0(M_n) & \to & 0 \end{array}$$

$\overset{\text{5-Lemma}}{\Longrightarrow}$ Es genügt, die Proposition für unitale C^*-Algebren zu zeigen.

Für $k \in \mathbb{N}$ definiere $\gamma_{n,k}: M_k(M_n(A)) \xrightarrow{\cong} M_{kn}(A)$.

Definiere $\gamma_{n,\infty}: P_\infty(M_n(A)) \to P_\infty(A)$, $\gamma_n|_{P_k(M_n(A))} := \gamma_{n,k}$,

und $\gamma_1: P_\infty(M_n(A)) \to K_0(A)$, $\gamma_1(.) := [\gamma_{n,\infty}(.)]_0$.

Verifiziere $\leadsto \gamma: K_0(M_n(A)) \to K_0(A)$.

Überprüfe, dass γ und $K_0(\iota_{n,A})$ zueinander invers sind. $\square$

7.12 Wir haben in C.8 gesehen: $p,q \in P(A)$, $\|p-q\|<\frac{1}{2} \Rightarrow p \sim_u q$.

[tatsächlich genügt $\|p-q\|<1$]

<u>Lemma</u>: Sei A eine C^*-Algebra.

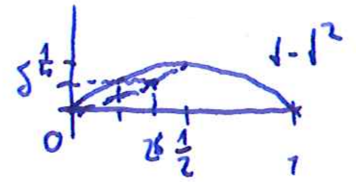
(i) Falls $a \in A_{sa}$ mit $\delta = \|a-a^2\| < \frac{1}{4}$, so existiert $p \in P(A)$ mit $\|a-p\| \leq 2\delta$.

(ii) Falls $p,q \in P(A)$ und $x \in A$ mit $\|x^*x-p\|, \|xx^*-q\| < \frac{1}{4}$, so gilt $p \sim_{MvN} q$.

[tatsächlich genügt $<\frac{1}{2}$]

Beweis: (i) $\sigma(a) \subset \{t \in \mathbb{R} \mid |t-t^2| \leq \delta\} \subset [-2\delta, 2\delta] \cup [1-2\delta, 1+2\delta]$

[$t \in \sigma(a) \overset{\text{spectral mapping}}{\Rightarrow} t-t^2 \in \sigma(a-a^2)$] [$|t-t^2| \leq \delta < \frac{1}{4}$
$\Rightarrow t \in [-2\delta, 2\delta] \cup [1-2\delta, 1+2\delta]$



]

$\Rightarrow f(t) := \begin{cases} 0, & t \leq 2\delta \\ 1, & t \geq 1-2\delta \end{cases}$ definiert eine stetige Funktion auf $\sigma(a)$.

$\Rightarrow p := f(a)$ ist Projektion mit $\|p-a\| = \|id - f\|_{\sigma(a)} \leq 2\delta$.

(ii) Setze $\delta := \frac{1}{2}\max\{\|x^*x-p\|, \|xx^*-q\|\} < \frac{1}{8}$;
überprüfe, dass $\sigma(x^*x), \sigma(xx^*) \subset [-2\delta, 2\delta] \cup [1-2\delta, 1+2\delta]$.
Sei f wie in (i) und definiere Projektionen $p_0 := f(x^*x)$, $q_0 := f(xx^*)$.
Dann gilt $\|p-p_0\| \leq 2\delta < \frac{1}{2} \Rightarrow p \sim_u p_0$; ebenso $q \sim_u q_0$.
Def. $g(t) := \begin{cases} 0, & t \leq 2\delta \\ t^{-\frac{1}{2}}, & t \geq 1-2\delta \end{cases}$, dann ist g stetig auf $\sigma(x^*x), \sigma(xx^*)$ und es gilt $t\,g(t)^2 = f(t)$. Setze $v := x\,g(x^*x)$, dann gilt
$v^*v = g(x^*x)x^*x\,g(x^*x) = f(x^*x) = p_0$, $vv^* = x\,g(x^*x)^2x^* = g(xx^*)^2xx^* = f(xx^*) = q_0$
[warum?]
$\Rightarrow p \sim_{MvN} p_0 \sim_{MvN} q_0 \sim_{MvN} q$. $\square$

7.13 Satz: Sei

$$(*)\quad \begin{tikzcd} A_1 \arrow[r] & \dots \arrow[r] & A_n \arrow[r, "\varphi_{n,n+1}"] \arrow[rr, bend left, "\varphi_{n,\infty}"] & \dots \arrow[r] & A = \varinjlim (A_n, \varphi_{n,n+1}) \end{tikzcd}$$

ein induktives System von C^*-Algebren mit Limes A.

Dann gilt $K_0(A) = \varinjlim \big(K_0(A_n), K_0(\varphi_{n,n+1})\big)$.

[induktiver Limes von abelschen Gruppen]

Mit anderen Worten, $K_0(\cdot)$ ist stetig.

Bew.: (i) $K_0(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_0(\varphi_{n,\infty})\big(K_0(A_n)\big)$:

"$\supseteq$" ist klar.

"$\subseteq$": Sei $x \in K_0(A)$.

$\Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{N},\ p \in P_k(A^+)$ mit $x = [p]_0 - [s(p)]_0$.

$(*)$ induziert

$$M_k(A_1^+) \to \dots \to M_k(A_n^+) \to \dots \to M_k(A^+)$$

$\rightsquigarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ a \in M_k(A_{n_0})^1_{s.a.}: \|\varphi_{n_0,\infty}(a) - p\| < \frac{1}{8}$,

$\|\varphi_{n_0,\infty}(a - a^2)\| < \frac{1}{8}$.

$\rightsquigarrow \exists\, n_1 \in \mathbb{N},\ \bar{a} \in M_k(A_{n_1})^1_{s.a.}: \|\varphi_{n_1,\infty}(\bar{a}) - p\| < \frac{1}{8}$,

$\|\bar{a} - \bar{a}^2\| < \frac{1}{8}$.

$\overset{7.12(i)}{\Rightarrow} \exists\, q \in P_k(A_{n_1}): \|\bar{a} - q\| < \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \|p - \varphi_{n_1,\infty}(q)\| < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow p \sim_0 \varphi_{n_1,\infty}(q)$

$\overset{\text{Prop. 7.6}}{\Rightarrow} x = [p]_0 - [s(p)]_0 = [\varphi_{n_1,\infty}(q)]_0 - [s(\varphi_{n_1,\infty}(q))]_0$

$= K_0(\varphi_{n_1,\infty})\big([q]_0 - [s(q)]_0\big)$

$\Rightarrow x \in K_0(\varphi_{n_1,\infty})\big(K_0(A_{n_1})\big)$.

(ii) $\ker(K_0(\varphi_{n,\infty})) = \bigcup\limits_{m=n+1}^{\infty} \ker(K_0(\varphi_{n,m}))$:

"$\supseteq$": ist klar;

"$\subseteq$": Sei $x \in \ker(K_0(\varphi_{n,\infty})) \subset K_0(A_n)$.

$\overset{\text{Prop. 7.6 (i),(iii)}}{\Longrightarrow}$ $\exists\, k \in \mathbb{N},\ p \in P_k(A_n^+)$ mit $x = [p]_0 - [s(p)]_0$

und $\varphi_{n,\infty}^{+(k)}(p) \sim \varphi_{n,\infty}^{+(k)}(s(p))$ in $P_k(A^+)$,

d.h. $\exists\, v \in M_k(A^+)$, $v^*v = \varphi_{n,\infty}(p)$, $vv^* = \varphi_{n,\infty}(s(p))$

$\rightsquigarrow$ $\exists\, m \geq n,\ w \in M_k(A_m^+)$:

$\|w^*w - \varphi_{n,m}(p)\|, \|ww^* - \varphi_{n,m}(s(p))\| < \frac{1}{4}$

$\overset{\text{Lemma 7.12 (ii)}}{\Longrightarrow}$ $\varphi_{n,m}(p) \sim_{MvN} \varphi_{n,m}(s(p))$

$\Rightarrow K_0(\varphi_{n,m})(x) = [\varphi_{n,m}(p)]_0 - [\varphi_{n,m}(s(p))]_0 = 0$

$\Rightarrow x \in \ker(K_0(\varphi_{n,m}))$.

(iii)
$$\begin{tikzcd}
K_0(A_1) \arrow[r] & K_0(A_2) \arrow[r] \arrow[drr] & \cdots \arrow[r] & K_0(A_n) \arrow[r] \arrow[dr, "K_0(\varphi_{n,\infty})"] & \cdots \arrow[r] & \lim\limits_{\to} K_0(A_n) \arrow[dl, dotted, "\exists!\,\mu"] \\
 & & & & K_0(A) &
\end{tikzcd}$$

(i) $\Rightarrow$ μ ist surjektiv.

(ii) $\Rightarrow$ μ ist injektiv. $\square$

7.14 **Cor.:** Für jede C^*-Algebra A induziert $id_A \otimes e_{11} : A \to A \otimes \mathcal{K}$ einen Isomorphismus $K_*(A) \cong K_*(A \otimes \mathcal{K})$.

Bew.:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes M_1 \arrow[r, hook] & A \otimes M_2 \arrow[r, hook] & \cdots \arrow[r] & A \otimes \mathcal{K} = \varinjlim A \otimes M_n \\
A \arrow[u, "id_A \otimes e_{11}"] \arrow[ur, "id_A \otimes e_{11}"'] \arrow[urrr, "id_A \otimes e_{11}"'] & & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
K_*(A \otimes M_1) \arrow[r] & K_*(A \otimes M_2) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & K_*(A \otimes \mathcal{K}) \arrow[d, equal, "7.13"] \\
 & & & \varinjlim K_*(A \otimes M_n) \\
K_*(A) \arrow[uu, "\cong"] \arrow[uur, "\cong"'] \arrow[urrr, "\cong"'] & & &
\end{tikzcd}$$

$\leadsto$ Prop. 7.11

$\square$