Aufgabe 1:
Sei A eine C*-Algebra. Sei A^{op} derselbe Vektorraum, ausgestattet mit derselben Norm und Involution, jedoch mit der Multiplikation $a \bullet b := ba$.
Man zeige:
(i) A^{op} ist eine C*-Algebra.
(ii) M_2 und M_2^{op} sind *-isomorph. Können Sie einen *-Isomorphismus explizit angeben?
(iii) Die Abbildung $\mathrm{id} : A \longrightarrow A^{\mathrm{op}}$ ist positiv. Sie ist vollständig positiv genau dann, wenn A kommutativ ist. Hinweis: Für den letzten Teil betrachte man zunächst ein möglichst einfaches Beispiel und benutze dann eine irreduzible Darstellung von A.

Bemerkung: Es gilt im Allgemeinen nicht $A \cong A^{\mathrm{op}}$ als C*-Algebren. Es ist eine schwierige offene Frage, ob die Aussage für A nuklear und separabel richtig ist.

Aufgabe 2:
Man beweise Lemma 3.20 b) für 2-positive Abbildungen (also insbesondere ohne den Satz von Stinespring zu benutzen):
Für C*-Algebren A, B und $\varphi : A \to B$ 2-positiv gilt:
$\{a \in A \mid \varphi(a^*a) = \varphi(a^*)\varphi(a),\ \varphi(aa^*) = \varphi(a)\varphi(a^*)\} = \{a \in A \mid \varphi(xa) = \varphi(x)\varphi(a),\ \varphi(ax) = \varphi(a)\varphi(x) \text{ für alle } x \in A\}$.
Hinweis: Lemma 3.8.

Aufgabe 3:
Seien A, B, C, D C*-Algebren und $\varphi : A \to C$, $\psi : B \to D$ vollständig positiv kontraktiv.
Man zeige, dass die Abbildung $\varphi \otimes \psi : A \odot B \to C \odot D$ vollständig positiv kontraktive Fortsetzungen $\varphi \otimes_{\min} \psi : A \otimes_{\min} B \to C \otimes_{\min} D$ und $\varphi \otimes_{\max} \psi : A \otimes_{\max} B \to C \otimes_{\max} D$ besitzt.

Abgabe in der Übung.