

Aufgabe 1:

Sei X ein Operatorsystem, B eine C^* -Algebra und $\varphi : X \rightarrow B$ linear mit $\varphi(1) \geq 0$, $\|\varphi(1)\| = \|\varphi\|$.
Muss φ positiv sein? Man vergleiche mit der Situation für Zustände.

Aufgabe 2:

Man beweise Lemma 3.8 (iii): Für Elemente a, h in einer C^* -Algebra A gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ a^* & h \end{pmatrix} \geq 0 \iff a^*a \leq h.$$

Man zeige außerdem, dass die Umkehrung der Implikation in Lemma 3.8 (ii) nicht gilt: Aus $a^*a \leq \|h\| \cdot h$ folgt nicht $\begin{pmatrix} h & a \\ a^* & h \end{pmatrix} \geq 0$ und auch nicht $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a^* & h \end{pmatrix} \geq 0$. (Man kann bis auf skalare Vielfache dieselben Elemente a, h für beide Aussagen benutzen.)

Aufgabe 3:

Sei A eine C^* -Algebra. Man zeige, dass die Abbildungen

$$\text{Tr}, \sigma : M_n(A) \rightarrow A, \quad \text{Tr}((a_{ij})) := \sum_i a_{ii} \text{ bzw. } \sigma((a_{ij})) := \sum_{i,j} a_{ij}$$

vollständig positiv sind.

Man folgere, dass $\|\sum_{ij} a_{ij}\| \leq n\|(a_{ij})\|$ gilt.