9. Die 6-Term-Sequenz

9.1 Satz: Sei $0 \to J \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} B \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von C^*-Algebren.

Dann existiert ein Homomorphismus δ_1, so dass

$$\begin{array}{ccccc} K_0(J) & \xrightarrow{K_0(\iota)} & K_0(A) & \xrightarrow{K_0(\pi)} & K_0(B) \\ \delta_1 \uparrow & & & & \\ K_1(B) & \xleftarrow{K_1(\pi)} & K_1(A) & \xleftarrow{K_1(\iota)} & K_1(J) \end{array} \qquad (*)$$

exakt ist.

Für $u \in \mathcal{U}_n(B^+)$ ist $\delta_1([u]_1) = [p]_0 - [s_J(p)]_0$

für $p \in \mathcal{P}_{2n}(J^+)$ mit $\iota^{+(2n)}(p) = v\begin{pmatrix}1_n & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}v^*$

und $v \in \mathcal{U}_{2n}(A^+)$ mit $\pi^{+(2n)}(v) = \begin{pmatrix}u & 0\\ 0 & u^*\end{pmatrix}$.

δ_1 ist natürlich, d.h.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & J & \to & A & \to & B & \to & 0 \\ & & \downarrow\gamma & /// & \downarrow\alpha & /// & \downarrow\beta & & \\ 0 & \to & J' & \to & A' & \to & B' & \to & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{ccc} K_1(B) & \xrightarrow{\delta_1} & K_0(J) \\ K_1(\beta)\downarrow & & \downarrow K_0(\gamma) \\ K_1(B') & \xrightarrow{\delta_1} & K_0(J') \end{array} \quad \text{kommutiert.}$$

Bew. (Idee): $\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix} \sim_h 1_{2n}$ in $\mathcal{U}_{2n}(B^+)$

$$\| $$

$$e^{ih_1} \cdots e^{ih_k}$$

$$\| \text{ [}\pi \text{ surjektiv]}$$

$$e^{i\pi^{+(2n)}(d_1)} \cdots e^{i\pi^{+(2n)}(d_k)}$$

$\rightsquigarrow$ $v = e^{id_1} \cdots e^{id_k} \in \mathcal{U}_{2n}(A^+)$ erfüllt $\pi^{+(2n)}(v) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}$

[vgl. Prop. 7.7]

und es gilt $\pi^{+(2n)}\left(v \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^*\right) = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in P_{2n}(B^+)$.

wie in Prop. 7.8

$\rightsquigarrow$ $\exists\, p \in P_{2n}(J^+)$: $\iota^{+(2n)}(p) = v \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^*$, $s_J(p) = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Überprüfe: $\delta_1([u]_1) = [p]_0 - [s_J(p)]_0$ ist wohldefiniert,

und $(*)$ ist exakt und natürlich. $\square$

9.2 Wir schreiben SA für die Einhängung

$$SA := C_0((0,1)) \otimes A$$

und $S^n A := S S^{n-1} A$.

Wissen aus Kapitel 2: S. ist ein exakter Funktor.

$\Big[$ $C_0((0,1)) \otimes \_$ ist exakt nach Prop. 2.4; $C_0((0,1))$ ist nuklear nach Satz 1.21. $\Big]$

<u>Satz</u> Sei A eine C^*-Algebra. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus

$$\Theta_A : K_1(A) \to K_0(SA).$$

Für $u \in \mathcal{U}_n(A^+)$ mit $s_A(u) = 1_n$ (vgl. Bem. 8.4(ii)) ist $\Theta_A([u]_1) = [p]_0 - [s_A(p)]_0$ für $p \in \mathcal{P}_{2n}((SA)^+)$ mit $p = v\begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^*$, $s_{SA}(p) = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$v \in \mathcal{U}_{2n}(C([0,1], A^+))$, $v(0) = 1_{2n}$, $v(1) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}$

und $s_A(v(t)) = 1_{2n}$, $t \in [0,1]$.

Bew.: Betrachte $0 \to SA \xrightarrow{\iota} CA \xrightarrow{\pi} A \to 0$

Satz 9.1 $\leadsto$

$$\begin{tikzcd}
K_0(SA) \arrow[r] & K_0(CA) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\;"] & K_0(A) \\
K_1(A) \arrow[u, "\delta_1"] & K_1(CA) \arrow[l] & K_1(SA) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

$K_0(CA) = 0$, $K_1(CA) = 0$

Setze $\Theta_A := \delta_1$; Rest Übung. $\square$

9.3 <u>Def./Prop.:</u> Für $n \geq 2$ definieren wir induktiv

$$K_n(.) := K_{n-1}(S.).$$

Dann ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ $K_n(.)$ ein halbexakter Funktor: $(C^*\text{-Alg}, {}^*\text{-Hom}) \to (\text{Ab}, \text{Hom})$.

Bew.: $S.$ ist ein exakter Funktor

$\leadsto$ $K_n(.)$ ist halbexakt falls $K_{n-1}(.)$ halbexakt ist, und die Aussage folgt mit Induktion. $\square$

9.4. F: $0 \to J \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} B \to 0$ $\overbrace{\text{und } n \geq 1}$ betrachte

$0 \to S^n J \xrightarrow{S^n\iota} S^n A \xrightarrow{S^n\pi} S^n B \to 0$ mit Indexabbildung $K_1(S^nB) \xrightarrow{\bar\delta_1} K_0(S^nJ)$ (aus Satz 9.1).

Satz 9.2 $\rightsquigarrow \Theta_{S^{n-1}J}: K_n(J) \overset{\text{Def. 9.3}}{=} K_1(S^{n-1}J) \xrightarrow{\cong} K_0(S^nJ)$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{ccc} K_{n+1}(B) & \overset{\exists!\,\delta_{n+1}}{\dashrightarrow} & K_n(J) \\ \text{Def. 9.3} \parallel & & \cong \downarrow \Theta_{S^{n-1}J} \\ K_1(S^nB) & \xrightarrow{\bar\delta_1} & K_0(S^nJ) \end{array}$$

Die Indexabbildungen δ_n, $n \geq 1$, sind natürlich, (denn die Abbildungen aus 9.1 und 9.2 sind natürlich).

Wir erhalten mit Satz 9.1 und Def. 9.3:

<u>Prop. 1</u> Eine kurze exakte Sequenz von C^*-Algebren

$0 \to J \to A \to B \to 0$

induziert eine lange exakte Sequenz von K-Gruppen

$$\cdots \to K_{n+1}(B) \xrightarrow{\delta_{n+1}} K_n(J) \to K_n(A) \to K_n(B) \xrightarrow{\delta_n} K_{n-1}(J) \to \quad \cdots \to K_1(B) \xrightarrow{\delta_1} K_0(J) \xrightarrow{K_0(\iota)} K_0(A) \xrightarrow{K_0(\pi)} K_0(B).$$

$\square$

9.5 Sei $\tilde{T}$ die Toeplitz Algebra, mit $T = C^*(S) \subset B(\ell^2(\mathbb{N}))$ und

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r] & \tilde{T} \arrow[r] \arrow[dr, "\tau"] & C(S^1) \arrow[r] \arrow[d, "ev_1"] & 0 \\ & & & \mathbb{C} & \end{tikzcd}$$

$$S \mapsto 1 \in \mathbb{C}$$

und

$$0 \to T_0 \to \tilde{T} \underset{\tau}{\overset{\sigma}{\rightleftarrows}} \mathbb{C} \to 0.$$

<u>Satz</u> (Cuntz): Für jede unitale C^*-Algebra D ist

$$K_0(\tau \otimes id_D) : K_0(\tilde{T} \otimes D) \to K_0(\mathbb{C} \otimes D) = K_0(D)$$

ein Isomorphismus.

[Insbesondere gilt $K_0(\tilde{T}) \cong K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$.]

Bew.: Für $D = \mathbb{C}$, d.h. $K_0(\tau)$ ist ein Isomorphismus.
Für beliebiges D kombiniere mit D bzw. id_D. [$\tilde{T}$, $K \otimes \tilde{T}$ sind nuklear]
Es gilt $K_0(\tau) K_0(\sigma) = K_0(id_{\mathbb{C}}) = id_{K_0(\mathbb{C})}$, wir müssen also $K_0(\sigma) K_0(\tau) = id_{K_0(\tilde{T})}$ zeigen.
Sei $\varepsilon : \tilde{T} \to K \otimes \tilde{T}$, $\varepsilon = e_{00} \otimes id_{\tilde{T}}$,
dann ist $K_0(\varepsilon)$ ein Isomorphismus.

Setze $B := \mathcal{J} \otimes 1_{\mathcal{J}} + \mathcal{K} \otimes \mathcal{J}$, dann ist $B \subset \mathcal{J} \otimes \mathcal{J}$ eine C^*-Unteralgebra und $\mathcal{K} \otimes \mathcal{J} \trianglelefteq B$ ist ein Ideal.

Sei $\pi : B \to B/_{\mathcal{K} \otimes \mathcal{J}}$ die Quotientenabbildung und $\Theta : \mathcal{J} \to B$, $\Theta(a) := a \otimes 1_{\mathcal{J}}$ die Inklusion.

Betrachte den Pullback

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{J} \arrow[d, "\pi \circ \Theta"] \\ B \arrow[r, "\pi"'] & B/_{\mathcal{K} \otimes \mathcal{J}} \end{tikzcd},$$

$\left[C = \{ (a,b) \in \mathcal{J} \oplus B \mid \pi\Theta(a) = \pi(b) \} \right]$

sowie die *-Homomorphismen

$$\gamma : \mathcal{K} \otimes \mathcal{J} \rightarrowtail C$$
$$b \mapsto (0, b)$$

und

$$\varrho : C \twoheadrightarrow \mathcal{J}$$
$$(a,b) \mapsto a.$$

und

$$\kappa : \mathcal{J} \to C$$
$$a \mapsto (a, a \otimes 1_{\mathcal{J}}).$$

$\rightsquigarrow$ $0 \to \mathcal{K} \otimes \mathcal{J} \xrightarrow{\gamma} C \underset{\kappa}{\overset{\varrho}{\rightleftarrows}} \mathcal{J} \to 0$ split exakt.

$\Rightarrow K_0(\gamma)$ ist injektiv

Setze $\lambda := \gamma\kappa : \mathcal{J} \to C$, dann ist $K_0(\lambda) = K_0(\gamma)K_0(\kappa)$ injektiv und es genügt, $K_0(\lambda) = K_0(\cancel{?})K_0(\gamma)K_0(\cancel{?})$ zu zeigen.

Setze $z_0 := S^2 S^{*2} \otimes 1 + e_{00} S^* \otimes S + S e_{00} \otimes S^* + e_{00} \otimes e_{00}$,

$z_1 := S^2 S^{*2} \otimes 1 + e_{00} S^* \otimes 1 + S e_{00} \otimes 1$,

$$z_0 = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \begin{smallmatrix}1 & & \\ & 0 & \\ & & \ddots\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0 & & \\ 1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots\end{smallmatrix} & 0 & \\ \hline \begin{smallmatrix}0 & 1 & \\ & \ddots & \ddots\end{smallmatrix} & 0 & 0 & \\ \hline 0 & 0 & 1 & \\ \hline & & & \ddots \end{array}\right)$$

$$z_1 = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 1 & 0 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & \\ \hline 0 & 0 & 1 & \\ \hline & & & \ddots \end{array}\right).$$

Dann sind z_0, z_1 Symmetrien in B und

$z_t := -i\, e^{i\pi(1-t) z_0/2}\, e^{i\pi t z_1/2}$, $t \in [0,1]$

definiert eine Homotopie $z : [0,1] \to U(B)$.

Es gilt $\pi(z_0) = \pi(z_1) = 1_{B/J\otimes T}$ [warum?],

also auch $\pi(z_t) = 1_{B/J\otimes T}$, $t \in [0,1]$ [warum?].

$\mathcal{T}$ ist die universelle von einer Isometrie erzeugte C^*-Algebra

wir dürfen $\varphi_t : \mathcal{T} \to C$, $t\in[0,1]$ definieren durch

$$\varphi_t(S) := (S, u_t(S\otimes 1_{\mathcal{T}}))$$

und $(\varphi_t)_{t\in[0,1]}$ ist ein Homotopie.

Ebenso existiert ein $*$-Hom. $\mu : \mathcal{T} \to \left\{ (a,b) \in \mathcal{T}\oplus \Theta(1-e_0)\mathcal{T}(1-e_0) \;\middle|\; \text{mit } \pi\Theta(a) = \pi(b) \right\} \subset C$

mit $\mu(S) = (S, S^2 S^* \otimes 1)$. [$\mu(S)$ ist keine Isometrie in C, [illegible]]

λ und μ haben orthogonale Bilder in C [warum?],

also auch $\lambda\circ\sigma\circ\tau$ und μ.

Weiter gilt

$$\varphi_0 = \mu + \lambda, \quad \varphi_1 = \mu + \lambda\circ\sigma\circ\tau \quad \text{[warum?]}.$$

$$\Rightarrow K_0(\mu) + K_0(\lambda) = K_0(\mu+\lambda) = K_0(\varphi_0) = K_0(\varphi_1) = K_0(\mu) + K_0(\lambda\sigma\tau)$$

$$\Rightarrow K_0(\lambda) = K_0(\lambda\sigma\tau)$$

□

9.6 Cor.: Für jede C^*-Algebra D gilt $K_0(J_0 \otimes D) = K_1(J_0 \otimes D) = 0$.

Beweis: Sei zunächst D unital.

$\rightsquigarrow 0 \to J_0 \otimes D \to J \otimes D \overset{\varepsilon \otimes id}{\rightleftarrows} \mathbb{C} \otimes D \to 0$ zerfällt

$\rightsquigarrow 0 \to K_0(J_0 \otimes D) \to K_0(J \otimes D) \xrightarrow{K_0(\varepsilon \otimes id)} K_0(\mathbb{C} \otimes D) \to 0$ ist exakt

$\overset{\text{Satz 9.5}}{\Rightarrow} K_0(J_0 \otimes D) = 0$.

Für D nichtunital haben wir

$0 \to D \otimes J_0 \to D^+ \otimes J_0 \rightleftarrows \mathbb{C} \otimes J_0 \to 0$

und

$0 \to K_0(D \otimes J_0) \to \underset{\overset{\|}{0}}{K_0(D^+ \otimes J_0)} \to \underset{\overset{\|}{0}}{K_0(\mathbb{C} \otimes J_0)} \to 0$ exakt

$\Rightarrow K_0(D \otimes J_0) = 0$.

Für K_1 benutzen $K_1(D \otimes J_0) \overset{\text{Satz 9.2}}{\cong} K_0(C_0(0,1) \otimes D \otimes J_0) = 0$. □

9.7 Wir haben $K \subset \mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}$ und $\pi(\mathcal{T}_0) \subset C_0((0,1))$,

wo $\mathcal{T} \xrightarrow{\pi} C(S^1) \cong \{f \in C([0,1]) \mid f(0)=f(1)\}$.

$\rightsquigarrow$ $0 \to K \to \mathcal{T}_0 \to C_0((0,1)) \to 0$ exakt

$\rightsquigarrow$ $0 \to K \otimes D \xrightarrow{\iota_D} \mathcal{T}_0 \otimes D \xrightarrow{\pi_D} SD \to 0$ für jede C^*-Algebra D

Satz 9.1
Cor 8.9
$\rightsquigarrow$ $\beta_D : K_1(SD) \xrightarrow{\delta_1} K_0(K \otimes D) \cong K_0(D)$

<u>Satz</u> (Bott Periodizität): Für jede C^*-Algebra D ist

$$\beta_D : K_1(SD) \to K_0(D)$$

ein natürlicher Isomorphismus.
Insbesondere ist $K_{n+2}(D) \cong K_n(D)$, $n \geq 0$.

Bew.: β_D natürlich: klar mit 9.1, 8.9.

Nach Prop. 9.4 ist

$$\underset{\overset{\parallel}{0}\ 9.6}{K_1(\mathcal{T}_0 \otimes D)} \to K_1(SD) \xrightarrow{\delta_1} K_0(K \otimes D) \to \underset{\overset{\parallel}{0}\ 9.6}{K_0(\mathcal{T}_0 \otimes D)}$$

exakt.

$\Rightarrow$ δ_1 ist Isomorphismus. □

9.8 Zu $0 \to J \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} B \to 0$ assoziieren wir die Exponentialabbildung

$$\delta_0 : K_0(B) \underset{9.7}{\xrightarrow{\beta_B^{-1}}} K_1(SB) \underset{9.3}{=} K_2(B) \underset{9.4}{\xrightarrow{\delta_2}} K_1(J).$$

Dann ist δ_0 natürlich (denn β_B und δ_1 sind natürlich) und

$$\begin{tikzcd}
K_0(B) \arrow[r, "\delta_0"] \arrow[d, "\beta_B^{-1}"'] & K_1(J) \arrow[d, "\theta_J"] \\
K_1(SB) \arrow[r, "\bar{\delta}_1", "9.1"'] & K_0(SJ)
\end{tikzcd}$$

kommutiert (vgl. 9.4).

Satz: Die 6-Term Sequenz

$$\begin{tikzcd}
K_0(J) \arrow[r, "K_0(\iota)"] & K_0(A) \arrow[r, "K_0(\pi)"] & K_0(B) \arrow[d, "\delta_0"] \\
K_1(B) \arrow[u, "\delta_1"] & K_1(A) \arrow[l, "K_1(\pi)"'] & K_1(J) \arrow[l, "K_1(\iota)"']
\end{tikzcd} \quad (*)$$

ist exakt.

Bew.: $K_2(A) \to K_2(B) \xrightarrow{\delta_2} K_1(J) \to K_1(A)$ ist exakt nach Prop. 9.4

$$\begin{tikzcd}
K_2(A) \arrow[r] \arrow[d, "\beta_A", "\cong"'] \arrow[dr, phantom, "{[9.7]}"] & K_2(B) \arrow[r, "\delta_2"] \arrow[d, "\beta_B", "\cong"'] \arrow[dr, phantom, "{[9.4]}"] & K_1(J) \arrow[r] \arrow[d, equal] & K_1(A) \arrow[d, equal] \\
K_0(A) \arrow[r] & K_0(B) \arrow[r, "\delta_0"] & K_1(J) \arrow[r] & K_1(A)
\end{tikzcd} \quad (**)$$

kommutiert $\overset{\text{5-Lemma}}{\rightsquigarrow}$ (**) ist exakt bei $K_0(B)$ und $K_1(J)$

$\overset{9.1}{\Longrightarrow}$ (*) ist exakt. □

9.9 Bem.: Die Exponentialabbildung lässt sich explizit beschreiben:

Sei $x = [p]_0 - [s(p)]_0 \in K_0(B)$ für ein $p \in P_n(B^+)$.

Finde $h \in M_n(A^+)_{s.a.}$ mit $\pi^{+(n)}(h) = p$.

Dann ist $u := -e^{2\pi i h} \in \underline{U_n(J^+)}_{[\pi^{+(n)}(u) = -e^{2\pi i \pi^{+(n)}(h)} = -e^{2\pi i p} = 1]}$ und

es gilt $\delta_0(x) = [u]_1 \in K_1(J)$. □

9.10 z.B. (i) $K_0(C_0(\mathbb{R}^n)) \cong K_0(S^n\mathbb{C}) = K_n(\mathbb{C}) \cong \begin{cases} K_0(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}, & n \text{ gerade} \\ K_1(\mathbb{C}) = 0, & n \text{ ungerade} \end{cases}$

$$K_1(C_0(\mathbb{R}^n)) \cong \begin{cases} 0, & n \text{ gerade} \\ \mathbb{Z}, & n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

(ii) Sei $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die n-Sphäre. $S^n = \mathbb{R}^{n+}$ (1-Punkt Kompaktifizierung)

$$\rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C_0(\mathbb{R}^n) \arrow[r] & C(S^n) \arrow[r, "ev_\infty"] & \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[l, bend right] & 0 \end{tikzcd}$$

$$\rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K_0(C_0(\mathbb{R}^n)) \arrow[r] & K_0(C(S^n)) \arrow[r] & K_0(\mathbb{C}) \arrow[r] \arrow[d, "0"] & 0 \\ 0 & K_1(\mathbb{C}) \arrow[l] \arrow[u, "0"] & K_1(C(S^n)) \arrow[l] & K_1(C_0(\mathbb{R}^n)) \arrow[l] & 0 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

$K_0(C_0(\mathbb{R}^n)) = \begin{cases} \mathbb{Z} \\ 0 \end{cases}$, $\quad K_0(C(S^n)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & n \text{ gerade} \\ \mathbb{Z} & n \text{ ungerade} \end{cases}$, $\quad K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$

$K_1(\mathbb{C}) = 0$, $\quad K_1(C(S^n)) \cong \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ \mathbb{Z} & n \text{ ungerade} \end{cases}$, $\quad K_1(C_0(\mathbb{R}^n)) = \begin{cases} 0 \\ \mathbb{Z} \end{cases}$

(iii) $0 \to SA \to C(\mathbb{T}, A) \leftrightarrows A \to 0$

$\Rightarrow K_0(C(\mathbb{T}, A)) \cong K_1(C(\mathbb{T}, A)) \cong K_0(A) \oplus K_1(A)$

(iv) $C(\mathbb{T}^2) \cong C(\mathbb{T}, C(\mathbb{T}))$

$\rightsquigarrow K_0(C(\mathbb{T}^2)) \cong K_1(C(\mathbb{T}^2)) \cong \mathbb{Z}^2$

allg.: $\quad \sim^{n} \qquad \sim^{n} \qquad \sim^{2^{n-1}}$

(v) $0 \to \mathcal{J}_0 \to \mathcal{J} \to \mathbb{C} \to 0$

$\rightsquigarrow K_0(\mathcal{J}) \cong \mathbb{Z}, \quad K_1(\mathcal{J}) = 0.$

(vi) $D_n := \{ f \in C_0([0,1], M_n) \mid f(1) \in \mathbb{C} \cdot 1_n \}$

$\rightsquigarrow 0 \to SM_n \to D_n \xrightarrow{\pi} \mathbb{C} \to 0$

$$\begin{array}{ccccc} 0 & & & & \mathbb{Z} \ni 1 \\ \| & & & & \wr\| \quad \downarrow \\ K_0(SM_n) & \to & K_0(D_n) & \to & K_0(\mathbb{C}) \ni [1_{\mathbb{C}}]. \\ \uparrow & & & & \downarrow \delta_0 \leftarrow ? \\ K_1(\mathbb{C}) & \leftarrow & K_1(D_n) & \leftarrow & K_1(SM_n) \ni [t \mapsto e^{2\pi i t} \cdot e_{11} + (1_n - e_{11})]_1 \\ \| & & & & \wr\| \quad \uparrow \\ 0 & & & & \mathbb{Z} \ni 1 \end{array}$$

$h := 1_{[0,1]} \otimes 1_n \in D_n$ d... gilt $\pi(h) = n \cdot 1_{\mathbb{C}} \rightsquigarrow \delta_0([1_{\mathbb{C}}]) = [-e^{2\pi i h}]_1$

$= [(t) \mapsto -e^{2\pi i t} \cdot 1_n]$

$= n \cdot [(t \mapsto e^{2\pi i t} \cdot e_{11} + (1_n - e_{11}))]_1$

$\rightsquigarrow \delta_0(1) = n \cdot (.)$

$\Rightarrow K_0(D_n) = 0, \quad K_1(D_n) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$

9.11 Fragen: Wieviel Information enthält $K_0(.)$?

$K_0(A_\theta) = ?$

$K_0(\mathcal{O}_n) = ?$

lassen sich θ bzw. n ablesen?

$K_0(A \rtimes G) = ?$

$K_0(C^*_{(r)}(G)) = ?$