6. Die K_0-Gruppe einer unitalen C^*-Algebra

6.1 <u>Def.:</u> Für eine C^*-Algebra A und $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$P_n(A) := P(M_n(A))$ $\left(= \{\text{Projektionen in } M_n(A)\}\right)$

und $P_\infty(A) := \bigsqcup_{n=1}^{\infty} P_n(A)$.

Für $p, q \in P_\infty(A)$ $(p \in P_n(A),\ q \in P_m(A))$

schreiben wir $p \sim_0 q$ falls $v = (v_{ij})_{ij} \in M_{m,n}(A)$

existiert mit $p = v^*v$, $q = vv^*$.

(Dabei ist $v^* := (v_{ij}^*)_{ji} \in M_{n,m}(A)$.)

Definiere $\oplus : P_\infty(A) \times P_\infty(A) \to P_\infty(A)$

durch $\quad p \oplus q := \operatorname{diag}(p,q) = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$,

d. h. für p, q wie oben ist $p \oplus q \in M_{n+m}(A)$.

6.2 <u>Prop.:</u> a) $\sim_0$ ist eine Äquivalenzrelation auf $P_\infty(A)$.

b) Für $p, q, r, p', q' \in P_\infty(A)$ gilt

(i) $p \sim_0 p \oplus 0_n$, $n \in \mathbb{N}$

(ii) Falls $p \sim_0 p'$, $q \sim_0 q'$, so gilt $p \oplus q \sim_0 p' \oplus q'$.

(iii) $p \oplus q \sim_0 q \oplus p$

(iv) Falls $p, q \in P_n(A)$ orthogonal sind $(pq = 0)$, so ist $p + q \in P_n(A)$ und es gilt $p + q \sim_0 p \oplus q$.

(v) $(p \oplus q) \oplus r = p \oplus (q \oplus r)$.

Bew.: a) $p \sim_0 q \sim_0 r$, $p = v^*v$, $q = vv^* = w^*w$, $r = ww^*$

$\Rightarrow p \sim_0 r$, denn
$$(wv)^*wv = v^*w^*wv = v^*qv = v^*v = p$$
bzw. $wv(wv)^* = r$

$\Rightarrow \sim_0$ transitiv.

$\sim_0$ symmetrisch: $v \leftrightarrow v^*$

$\sim_0$ reflexiv: $v = p$.

b) (i) Sei $p \in P_n(A)$. Dann: $v = \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} \in M_{n+m,n}(A)$ gilt

$$vv^* = \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in P_{n+m,n+m}(A),$$

$$v^*v = \begin{pmatrix} p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} = p \in P_n(A).$$

(ii) Betrachte $u = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix}$.

(iii) Betrachte $u = \begin{pmatrix} 0 & q \\ p & 0 \end{pmatrix}$.

(iv) Betrachte $u = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in M_{2n,n}(A)$, dann

$$u^*u = p^2 + q^2 = p+q,$$
$$uu^* = \begin{pmatrix} p & pq \\ qp & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} = p \oplus q.$$

(v) trivial.

6.3 Def./Prop.: Für eine C^*-Algebra A setzen wir $D(A) := P_\infty(A)/_{\sim_0}$ und schreiben $[p]_D$ für die Äquivalenzklasse von $p \in P_\infty(A)$. Wir definieren eine Addition $+$ auf $D(A)$ durch

$$[p]_D + [q]_D := [p \oplus q]_D .$$

Diese Operation ist wohldefiniert und $(D(A),+)$ ist eine abelsche Halbgruppe.

Beweis: Folgt aus Prop. 6.2 a) und b) (i), (ii), (iii), (v). $\square$

6.4 Erinnerung: Sei $(S,+)$ eine abelsche Halbgruppe. Wir definieren eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf $S \times S$ durch $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) :\Leftrightarrow \exists z \in S : x_1 + y_2 + z = x_2 + y_1 + z$. Wir schreiben $\langle x, y \rangle$ für die Klasse von (x,y) in

$$\mathrm{Groth}(S) := S \times S/_\sim .$$

Definiere eine Addition auf $\mathrm{Groth}(S)$ durch

$$\langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle := \langle x_1 + x_2 , y_1 + y_2 \rangle ;$$

$(\mathrm{Groth}(S), +)$ ist dann eine abelsche Gruppe.

Bew. (i) $p \sim_s q \Rightarrow p \oplus r \sim_0 q \oplus r$ für ein $r \in P_m(A)$

$$\Rightarrow p \oplus r \oplus (1-r) \overset{6.4}{\sim_0} q \oplus r \oplus (1-r)$$

$$\underset{p \oplus 1_m}{\overset{6.6(iv)}{\sim_0}} \qquad \underset{q \oplus 1_m}{\overset{6.6(iv)}{\sim_0}}$$

$\overset{6.4}{\Rightarrow} [p]_0 = [q]_0$

$\overset{6.14}{\Rightarrow} [p]_D + [e]_D = [q]_D + [e]_D$ für ein $e \in P_k(A)$

$\Rightarrow p \oplus e \sim_0 q \oplus e$ für ein $e \in P_k(A)$.

$\Rightarrow p \sim_s q$

(ii) $p \sim_h q \Rightarrow \exists p_0, \dots, p_{k+l} \in P_n(A)$ $\|p_l - p_{l+1}\| < \frac{1}{2}$.

$\Rightarrow$ Durf. o.E. $\|p-q\| < \frac{1}{2}$ annehmen.

Setze $z := pq + (1-p)(1-q)$,

dann gilt $pz = pq = zq$ und

$$\|z - 1_n\| = \|p(q-p) + (1-p)((1-q)-(1-p))\|$$

$$= \|p(q-p) + (1-p)(p-q)\|$$

$$\leq 2\|p-q\|$$

Neumann Reihe < 1

$\Rightarrow z$ invertierbar

$\Rightarrow z = u|z|$ für ein $u \in U(M_n(A))$; es gilt $|z|$ invertierbar

Dann gilt $q = z^{-1}zq = z^{-1}pz = |z|^{-1}u^*pu|z|$ (*)

$$\overset{q=q^*}{=} \left(|z|^{-1}u^*pu|z|\right)^* = |z|u^*pu|z|^{-1}$$

$\Rightarrow |z|^2 u^*pu|z|^{-1} = u^*pu$

$\Rightarrow [|z|^2, u^*pu] = 0$

$\Rightarrow [|z|, u^*pu] = 0$

$\overset{(*)}{\Rightarrow} q = u^*pu$

$\Rightarrow q \sim_u p$

$\Rightarrow q \sim_0 p$.

(iii) Sei $v \in M_n(A)$ mit $p = v^*v$, $q = vv^*$.

Dann gilt $u := \begin{pmatrix} v & 1-q \\ 1-p & v^* \end{pmatrix}$, $w := \begin{pmatrix} q & 1-q \\ 1-q & q \end{pmatrix} \in \mathcal{U}(M_{2n}(A))$

sowie $wu\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}u^*w^* = w\begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}w^* = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, also $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_u \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(iv) Für $t \in [0,1]$ setze $R_t := \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2}t & \sin\frac{\pi}{2}t \\ -\sin\frac{\pi}{2}t & \cos\frac{\pi}{2}t \end{pmatrix} \in \mathcal{U}(M_2)$.

Falls $u \in \mathcal{U}_0(M_n(A))$ mit $u^*pu = q$, so gilt

$$\begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^* & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (R_0 \otimes 1_n)\begin{pmatrix} u^* & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}(R_0^* \otimes 1)\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}(R_0 \otimes 1_n)\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}(R_0^* \otimes 1)$$

$$\sim_h (R_1 \otimes 1_n)\begin{pmatrix} u^* & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}(R_1^* \otimes 1)\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}(R_1 \otimes 1_n)\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}(R_1^* \otimes 1_n)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

∎

6.7 Def.: Sei A eine C^*-Algebra.

(i) $p,q \in P_\infty(A)$ heißen stabil äquivalent, $p \sim_s q$,
falls $r \in P_\infty(A)$ existiert mit $p \oplus r \sim_0 q \oplus r$.

(ii) $p,q \in P_n(A)$ heißen homotop, $p \sim_h q$,
falls $\phi : [0,1] \to P_n(A)$ stetig existiert mit
$\phi(0) = p$, $\phi(1) = q$.

$\sim_s$ und $\sim_h$ sind Äquivalenzrelationen [warum?].

6.8 Prop.: Sei A eine unitale C^*-Algebra.

(i) Für $p,q \in P_\infty(A)$ gilt
$p \sim_s q \iff p \oplus 1_m \sim_0 q \oplus 1_m$ für ein $m \in \mathbb{N} \iff [p]_0 = [q]_0$.

(ii) Für $p,q \in P(A)$ gilt
$p \sim_h q \Rightarrow [p]_0 = [q]_0$.

(iii) Für $p,q \in P_n(A)$ gilt
$p \sim_0 q \Rightarrow \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ in $M_{2n}(A)$

(iv) Für $p,q \in P_n(A)$ gilt $p \sim_u q \Rightarrow \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ in $M_{2n}(A)$.

Zu $\bar{y} \in S$ beliebig betrachte die Abbildung

$$\gamma_S : S \to \mathrm{Groth}(S)$$
$$x \mapsto \langle x+\bar{y}, \bar{y} \rangle,$$

dann hängt γ_S nicht von der Wahl von $\bar{y}$ ab [warum?].

Es gilt $\mathrm{Groth}(S) = \{\gamma_S(x) - \gamma_S(y) \mid x, y \in S\}$.

γ_S ist injektiv genau dann wenn S die Kürzungseigenschaft besitzt, d.h. $x+z = y+z \Rightarrow x = y$.

$\mathrm{Groth}(.)$ ist ein Funktor bzgl. additiver Abbildungen:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\gamma_S"'] & T \arrow[d, "\gamma_T"] \\ \mathrm{Groth}(S) \arrow[r, "\mathrm{Groth}(\varphi)"'] & \mathrm{Groth}(T) \end{tikzcd}$$

Gruppenhom.

Universelle Eigenschaft

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi \text{ additiv}"] \arrow[d, "\gamma_S"'] & G \\ \mathrm{Groth}(S) \arrow[ur, dashed, "\exists!"'] & \end{tikzcd}$$

G – abelsche Gruppe

$\exists!$ Gruppenhom.

6.5 Def.: Sei A eine unitale C^*-Algebra.

Wir definieren $K_0(A) := \mathrm{Grot}(\mathcal{D}(A))$.

Für $p \in P_\infty(A)$ schreiben wir $[p]_0 := \gamma_{\mathcal{D}(A)}([p]_{\mathcal{D}}) \in K_0(A)$.

6.6 Prop.: Sei A eine unitale C^*-Algebra. Dann gilt:

(i) $K_0(A) = \{[p]_0 - [q]_0 \mid p, q \in P_\infty(A)\}$.

(ii) $[p \oplus q]_0 = [p]_0 + [q]_0$, $p, q \in P_\infty(A)$.

(iii) $[0_A]_0 = 0_{K_0(A)}$.

(iv) Falls $p \perp q \in P_n(A)$, so gilt $[p+q]_0 = [p]_0 + [q]_0$.

Außerdem erfüllt $K_0(A)$ folgende universelle Eigenschaft:

Sei G eine abelsche Gruppe und $\nu : P_\infty(A) \to G$ eine Abbildung mit

a) $\nu(p \oplus q) = \nu(p) + \nu(q)$, $p, q \in P_\infty(A)$

b) $\nu(0_A) = 0_G$

c) $p \sim_0 q \Rightarrow \nu(p) = \nu(q)$.

Dann ex. genau ein Gruppenhom. $\alpha : K_0(A) \to G$ so dass

$$\begin{tikzcd} P_\infty(A) \arrow[d, "{[\cdot]_0}"'] \arrow[dr, "\nu"] & \\ K_0(A) \arrow[r, dashed, "\alpha"'] & G \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis: klar.

27

6.9 Bem. (i) Der Beweis von 6.8 (vii) funktioniert auch mit $A^\sim$ falls A nicht unital ist.

(ii) Es gilt: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : p, q \in P(A), \|p-q\| < \delta$
$\Rightarrow \exists u \in \mathcal{U}(A^\sim) : u p u^* = q, \|u-1\| < \varepsilon$.

Die Abhängigkeit $\delta(\varepsilon)$ lässt sich explizit angeben.

6.10 Cor.: In der universellen Eigenschaft von Prop. 6.6 kann man c) ersetzen durch

c') $p, q \in P_n(A),\; p \sim_h q \Rightarrow \nu(p) = \nu(q)$.

[bzw. $p \sim_s q$]

Bew.: Falls $p, q \in P_\infty(A)$ mit $p \sim_0 q$, so ex. $k, k', k'' \in \mathbb{N}$ mit $p' := p \oplus 0_{k'} \sim_0 p \sim_0 q \sim_0 q \oplus 0_{k''} =: q'$ und $p', q' \in P_k(A)$.

$\overset{\text{Prop. 6.8 (vii),(iv)}}{\Rightarrow} \quad p' \oplus 0_{3k} \sim_h q' \oplus 0_{3k}$

$\Rightarrow \nu(p) \overset{b)}{=} \nu(p) + \underbrace{\nu(0) + \ldots + \nu(0)}_{k'+3k} \overset{a)}{=} \nu(p \oplus 0_{k'} \oplus 0_{3k})$

$\overset{a)}{=} \nu(p' \oplus 0_{3k}) \overset{c')}{=} \nu(q' \oplus 0_{3k}) = \ldots = \nu(q)$.

$\Rightarrow \beta : D(A) \to G,\; \beta([p]_D) := \nu(p)$ ist wohldefiniert.

Rest wie in 6.6: Additivität von β folgt aus a);
α existiert nach 6.4 (u. E. von Groth(.)). $\square$

6.11 Seien A, B unitale C^*-Algebren und $\varphi: A \to B$ ein $*$-Hom. Dann induziert φ eine Abbildung $\varphi^{(\infty)}: P_\infty(A) \to P_\infty(B)$

$$\varphi^{(\infty)}|_{P_n(A)} := \varphi^{(n)}|_{P_n(A)}, \quad n \in \mathbb{N};$$

außerdem gilt für $p, q \in P_\infty(A)$

$$p \sim_h q \Rightarrow \varphi^{(\infty)}(p) \sim_h \varphi^{(\infty)}(q) \quad [\text{warum?}].$$

Definiere $\nu: P_\infty(A) \to K_0(B)$ durch $\nu(p) := [\varphi(p)]_0$, $p \in P_\infty(A)$.
Dann erfüllt ν 6.6 a), b) und 6.10 c'), also ex. genau ein Gruppenhom. $K_0(\varphi): K_0(A) \to K_0(B)$ so dass

$$\begin{array}{ccc} P_\infty(A) & \xrightarrow{\varphi^{(\infty)}} & P_\infty(B) \\ {\scriptstyle [\cdot]_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle [\cdot]_0} \\ K_0(A) & \xrightarrow{K_0(\varphi)} & K_0(B) \end{array}$$

kommutiert. Wir schreiben auch φ_* bzw. φ_0 für $K_0(\varphi)$.

<u>Prop.:</u> Seien A, B, C unitale C^*-Algebren und $\varphi: A \to B$, $\psi: B \to C$ $*$-Hom. Dann gilt

(i) $K_0(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{K_0(A)}$

(ii) $K_0(\psi \circ \varphi) = K_0(\psi) \circ K_0(\varphi)$

(iii) $K_0(0_{A \to B}) = 0_{K_0(A) \to K_0(B)}$.

Insbesondere ist K_0 ein kovarianter Funktor $(C^*\mathrm{Alg}, {}^*\mathrm{Hom}) \to (\mathrm{AB}, \mathrm{Hom})$.
Lässt man $\{0\} \in C^*\mathrm{Alg}^1$ zu, so gilt $K_0(\{0\}) = \{0\}$. unitale C^*Algebra [illegible]

Beweis: Wegen $K_0(\varphi)([p]_0) = [\varphi^{(\infty)}(p)]_0$, $p \in P_\infty(A)$,
gilt $K_0(\mathrm{id}_A)([p]_0) = [p]_0$ und $K_0(\psi\circ\varphi)([p]_0) = K_0(\psi)\circ K_0(\varphi)([p]_0)$.
Wegen $K_0(A) = \{[p]_0 - [q]_0 \mid p,q \in P_\infty(A)\}$ [6.6(i)] gilt daher
(i) und (ii); (iii) folgt mit $[0_A]_0 = 0_{K_0(A)}$ [6.5(iii)].
$K_0(\{0\}) = \{0\}$: $P_n(\{0\}) = \{0_n\}$, wo $0_n := 0_{M_n(\{0\})}$.
Aber $0_n \sim_0 0_m$, also ist $D(\{0\}) = \{[0_1]_D\} \cong \{0\}$ als abelsche Halbgruppe
und $K_0(\{0\}) = \mathrm{Groth}(\{0\}) = \{0\}$. □

6.12 Def.: Seien A, B C^*-Algebren. Zwei $*$-Homomorphismen $\varphi, \psi: A \to B$ heißen homotop, $\varphi \sim_h \psi$, falls es $*$-Hom. $\varphi_t: A \to B$, $t \in [0,1]$ gibt mit $\varphi_0 = \varphi$, $\varphi_1 = \psi$, und so dass $t \mapsto \varphi_t(a)$ stetig ist für jedes $a \in A$.

Äquivalent: Es existiert ein $*$-Hom. $\gamma: A \to C([0,1], B)$ mit
$$\varphi = ev_0 \circ \gamma, \quad \psi = ev_1 \circ \gamma.$$
A und B heißen homotopieäquivalent, falls $*$-Hom. $\varrho: A \to B$, $\sigma: B \to A$ existieren mit $\sigma\circ\varrho \sim_h \mathrm{id}_A$, $\varrho\circ\sigma \sim_h \mathrm{id}_B$.
Wir sagen auch A und B sind homotopieäquivalent via $A \xrightarrow{\varrho} B \xrightarrow{\sigma} A$.

6.13 <u>Prop.:</u> Seien A, B unitale C^*-Algebren.

(i) Für $\varphi, \psi : A \to B$, gilt $\varphi \sim_h \psi \Rightarrow K_0(\varphi) = K_0(\psi)$.

(ii) Falls A, B homotopieäquivalent sind via $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\sigma} A$, so sind $K_0(\varphi)$ und $K_0(\sigma)$ zueinander inverse Isomorphismen zwischen $K_0(A)$ und $K_0(B)$.

Beweis: (i) Sei $\varphi_t : A \to B$, $t \in [0,1]$ ein punktweise stetiger Pfad von $*$-Homomorphismen mit $\varphi_0 = \varphi$, $\varphi_1 = \psi$.

$\rightsquigarrow \varphi_t^{(n)} : P_n(A) \to P_n(B)$, $t \in [0,1]$ ist punktweise stetig für jedes n

$\rightsquigarrow$ Für $p \in P_n(A)$ ist $t \mapsto \varphi_t^{(n)}(p)$ stetig, so dass $\varphi^{(n)}(p) = \varphi_0^{(n)}(p) \sim_h \varphi_1^{(n)}(p) = \psi^{(n)}(p)$

$\Rightarrow K_0(\varphi)([p]_0) \overset{6.11}{=} [\varphi^{(n)}(p)]_0 \overset{6.8(ii)}{=} [\psi^{(n)}(p)]_0 = K_0(\psi)([p]_0)$

$\overset{6.6(i)}{\Rightarrow} K_0(\varphi) = K_0(\psi)$.

(ii) folgt aus (i) mit Prop. 6.11 (i), (ii). $\square$

6.14 <u>Prop.:</u> Seien A, B unitale C^*-Algebren und $\varphi, \psi : A \to B$ $*$-Hom.
Falls $\varphi \perp \psi$, d.h. $\varphi(a)\psi(a') = 0$ für alle $a, a' \in A$ (äquivalent: $\varphi(1_A)\psi(1_A) = 0$), so ist $\varphi + \psi : A \to B$ ein $*$-Homomorphismus und es gilt $K_0(\varphi + \psi) = K_0(\varphi) + K_0(\psi)$.

Bew.: $\varphi+\psi$ ist Hom.: klar, ebenso für $\varphi^{(n)}+\psi^{(n)}$.

Es folgt für $p\in P_n(A)$

$$K_0(\varphi+\psi)([p]_0) = [(\varphi+\psi)^{(n)}(p)]_0$$
$$= [(\varphi^{(n)}+\psi^{(n)})(p)]_0$$
$$= [\varphi^{(n)}(p)+\psi^{(n)}(p)]_0$$
$$\overset{6.6(iv)}{=} [\varphi^{(n)}(p)]_0+[\psi^{(n)}(p)]_0$$
$$= K_0(\varphi)([p]_0)+K_0(\psi)([p]_0)$$
$$\overset{6.6(i)}{\Rightarrow} K_0(\varphi+\psi)=K_0(\varphi)+K_0(\psi).$$ □

6.15 Prop.: Sei A eine unitale C^*-Algebra.
Dann induziert die zerfallende exakte Sequenz

$$0\to A \xrightarrow{\iota} A^+ \underset{\xleftarrow{\sigma}}{\xrightarrow{\pi}} \mathbb{C} \to 0 \quad [\text{wobei } \sigma(1_{\mathbb{C}}) = 1_{A^+}]$$

eine zerfallende exakte Sequenz

$$0\to K_0(A)\xrightarrow{K_0(\iota)} K_0(A^+) \underset{\xleftarrow{K_0(\sigma)}}{\xrightarrow{K_0(\pi)}} K_0(\mathbb{C})\to 0. \quad (*)$$

Bew.: Betrachte die Hom. $\mu: A^+\to A$, $x\mapsto 1_A x 1_A$ und $\lambda:\mathbb{C}\to A^+$, $\alpha\mapsto\alpha(1_{A^+}-1_A)$.

Dann gilt $id_A=\mu\circ\iota$, $id_{A^+}=\iota\circ\mu+\lambda\circ\pi$, $\pi\circ\iota=0_{A\to\mathbb{C}}$, $\pi\circ\sigma=id_{\mathbb{C}}$ und somit

$0=K_0(0_{A\to\mathbb{C}})=K_0(\pi\circ\iota)=K_0(\pi)\circ K_0(\iota)$, $\Rightarrow \operatorname{im} K_0(\iota)\subset\ker K_0(\pi)$

$id_{K_0(\mathbb{C})}=K_0(id_{\mathbb{C}})=K_0(\pi\circ\sigma)=K_0(\pi)\circ K_0(\sigma)$ $\Rightarrow K_0(\pi)$ surjektiv, (*) zerfällt

$id_{K_0(A)}=K_0(id_A)=K_0(\mu\circ\iota)=K_0(\mu)\circ K_0(\iota)$ $\Rightarrow K_0(\iota)$ injektiv

$id_{K_0(A^+)}=K_0(\iota)\circ K_0(\mu)+K_0(\lambda)\circ K_0(\pi)$ $\Rightarrow \ker K_0(\pi)\subset\operatorname{im}K_0(\iota)$. □

6.16 Prop.: Sei $\mathcal{A}$ eine unitale C^*-Algebra und $\tau \in T(\mathcal{A})$ ein positives Spurfunktional. Dann definiert

$$\tau_* : K_0(\mathcal{A}) \to \mathbb{R}$$
$$[p]_0 \mapsto (\mathrm{Tr}_{M_n} \otimes \tau)(p), \quad p \in M_n \otimes \mathcal{A}$$

ein Gruppenhom. mit $\tau_* \gamma_D(D(\mathcal{A})) \subset \mathbb{R}_+$ und $\tau_*([1_{\mathcal{A}}]_0) = \|\tau\|$.

Bew.: $\mathrm{Tr}_{M_n} \otimes \tau$ ist ein positives Spurfunktional (mit Norm $n \cdot \|\tau\|$) auf $M_n \otimes \mathcal{A}$.

Nach 6.8 (ii) gilt $p \sim_h q \Rightarrow p \sim_u q \Rightarrow (\mathrm{Tr}_{M_n} \otimes \tau)(p) = (\mathrm{Tr}_{M_n} \otimes \tau)(q)$

$$\Rightarrow \nu : P_\infty(\mathcal{A}) \to \mathbb{R}$$
$$p \mapsto (\mathrm{Tr}_{M_n} \otimes \tau)(p)$$

erfüllt 6.10 c').

ν erfüllt aber auch 6.6 a), b)

$\overset{\text{Cor 6.10}}{\Longrightarrow}$
$$\begin{tikzcd} P_\infty(\mathcal{A}) \arrow[d, "{[\,.\,]_0}"'] \arrow[dr, "\nu"] & \\ K_0(\mathcal{A}) \arrow[r, dashed, "\exists!\, \tau_*"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Rest ist klar. $\square$

6.17 z.B.: $K_0(M_n) \cong \mathbb{Z}$:

Für $p,q \in P_\infty(M_n)$ gilt: • $p \sim_0 q \Leftrightarrow \mathrm{rk}\, p = \mathrm{rk}\, q$

• $\forall r \in \mathbb{N}\ \exists p \in M_k(M_n): \mathrm{rk}\, p = r$

$\Rightarrow$ $\mathbb{N} \to D(M_n)$ ist ein Isomorphismus von Halbgruppen.

$$0 \mapsto [0]_D$$
$$1 \mapsto [e_{11}]_D$$

$\mathrm{Groth}(\mathbb{N}) \cong \mathbb{Z} \Rightarrow K_0(M_n) = \mathrm{Groth}(D(M_n)) \cong \mathbb{Z}$.

Es gilt

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}"] & K_0(M_n) \arrow[r, "\mathrm{Tr}_*"] & \mathbb{Z} \end{tikzcd}.$$

$$1 \mapsto [e_{11}]_0$$

6.18 z.B.: Sei $\mathcal{H}$ ein unendlichdimensionaler Hilbertraum.

Dann gilt $K_0(B(\mathcal{H})) = 0$.

Bew. für $\mathcal{H}$ separabel: $M_n(B(\mathcal{H})) \cong B(\mathcal{H}^{\oplus n})$

$\rightsquigarrow \gamma: P_\infty(B(\mathcal{H})) \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ← abelsche Halbgruppe

$p \mapsto \dim(p(\mathcal{H}^{\oplus n}))$

Für $p,q \in M_n(B(\mathcal{H}))$ gilt: $\gamma(p) = \gamma(q) \Leftrightarrow p \sim_{MvN} q$.

Für $p \in M_n(B(\mathcal{H}))$, $q \in M_m(B(\mathcal{H}))$, $m \le n$, gilt: $p \sim_0 q \Leftrightarrow p \sim_{MvN} q \oplus 0_{n-m}$.

Weiter gilt $\gamma(p \oplus q) = \gamma(p) + \gamma(q)$ (Dimension ist additiv).

$\Rightarrow \gamma$ induziert ein Halbgruppenisomorphismus $\bar{\gamma}: D(B(\mathcal{H})) \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.
$[p]_D \mapsto \gamma(p)$

$\Rightarrow K_0(B(\mathcal{H})) = \mathrm{Groth}(D(B(\mathcal{H}))) \cong \mathrm{Groth}(\mathbb{N} \cup \{\infty\}) \cong \{0\}$.
[warum?]

6.19 z.B.: Sei X ein kontrahierbarer kompakter Hausdorffraum, d.h. es gibt $x_0 \in X$ und $h : [0,1] \times X \to X$ stetig mit $h(1,x) = x$, $h(0,x) = x_0$, $x \in X$.

Dann gilt $K_0(C(X)) \cong \mathbb{Z}$:

$C(X)$ und $\mathbb{C}$ sind homotopieäquivalent via

$$C(X) \underset{ev_{x_0}}{\xrightarrow{g}} \mathbb{C} \underset{\lambda \mapsto \lambda \cdot 1_X}{\xrightarrow{\sigma}} C(X), \text{ denn } g \circ \sigma = id_{\mathbb{C}}$$

und $\sigma \circ g \sim_h id_{C(X)}$: $\varphi_t : C(X) \to C(X)$, $f(.) \mapsto f \circ h(t,.)$

ist für festes f stetig in t;

$\varphi_0 = \sigma \circ g$, $\varphi_1 = id_{C(X)}$

$$\overset{6.13(ii)}{\Longrightarrow} K_0(C(X)) \cong K_0(\mathbb{C}) \overset{6.14}{\cong} \mathbb{Z}.$$