# 5. Amenabilität

**5.1 Def.** (von Neumann): Eine diskrete Gruppe $G$ heißt amenabel (oder mittelbar), falls ein Zustand $\mu \in S(\ell^\infty(G))$ existiert mit $\mu(f) = \mu(s \cdot f)$, wo $s \cdot f(.) = f(s^{-1}.)$, $f \in \ell^\infty(G)$, $s \in G$.

$\mu$ heißt linksinvariantes Mittel.

$$\left[ (rs) \cdot f(t) = f((rs)^{-1} t) = f(s^{-1}(r^{-1} t)) = r \cdot (s \cdot f)(t) \right]$$

**5.2 Def.** Eine diskrete Gruppe $G$ erfüllt die Følnerbedingung, falls für jede endliche Teilmenge $E \subset\subset G$ und jedes $\varepsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $F \subset\subset G$ existiert mit

$$\max_{s \in E} \frac{|F \,\Delta\, sF|}{|F|} < \varepsilon,$$

wo $sF := \{ st \mid t \in F \}$ und $F \Delta sF := F \cup sF \setminus F \cap sF$.

$F$ heißt Følnermenge zu $E$ und $\varepsilon$.

5.3 **Satz**: Für eine diskrete Gruppe $G$ sind äquivalent:

(i) $G$ ist mittelbar.

(ii) $G$ erfüllt die Følnerbedingung.

(iii) $C^*_r(G)$ ist nuklear.

Erinnerung: $C^*_r(G) = C^*(\lambda(G)) \subset B(\ell^2(G))$, wo die linksreguläre Darstellung $\lambda: G \to \mathcal{U}(B(\ell^2(G)))$ gegeben ist durch $\lambda_g(\eta_h) := \eta_{gh}$ $[\eta_g(t) = \delta_{g,t}]$.

Wir haben $\ell^\infty(G) \hookrightarrow B(\ell^2(G))$ und es gilt

$f \mapsto m_f$ (Multiplikationsoperator)

$m_{s.f} = \lambda_s m_f \lambda_{s^{-1}}$ [warum?].

Bew.: (i) $\Rightarrow$ (ii) (Idee): Sei $E \subset\subset G$ endlich und $\varepsilon > 0$.

Sei $\mu \in S(\ell^\infty(G))$ ein linksinvariantes Mittel.

Es gilt $\ell^\infty(G) = \ell^1(G)^*$ und $\ell^1(G) \underset{\substack{w^*\text{-dicht} \\ (\ell^{\infty *}, \ell^\infty)}}{\subseteq} \ell^1(G)^{**} = \ell^\infty(G)^*$.

$\Rightarrow \exists\, (\mu_\gamma)_\gamma \subset \ell^1(G)$ mit $\mu_\gamma \xrightarrow{w^*} \mu$.

Man kann $(\mu_\gamma)_\gamma \subset \ell^1(G)^1_+ =: \mathrm{Prob}(G)$ wählen. [warum?]

Aber dann gilt für jedes $s \in E$

$$s \cdot \mu_\gamma - \mu_\gamma \xrightarrow{w^*} 0 \quad [\text{warum?}]$$

$$\Rightarrow \quad s \cdot \mu_\gamma - \mu_\gamma \xrightarrow{w} 0 \quad [\text{warum?}]$$

$$\Rightarrow 0 \in \bigcap_{s \in E} \overline{\{ s\cdot\mu' - \mu' \mid \mu' \in \mathrm{Prob}(G)\}}^{w}$$

$$= \overline{\underbrace{\bigcap_{s\in E} \{ \;\; \text{---} \;\; \}}_{\neq \emptyset}}^{w}$$

Hahn-Banach $\cap$ $\cup\cup$ konvex

$$= \overline{\bigcap_{s\in E} \{ \;\; \text{---} \;\; \}}^{\|.\|}$$

$$\Rightarrow \exists\, \bar\mu \in \mathrm{Prob}(G) : \sum_{s\in E} \| s\cdot\bar\mu - \bar\mu \|_1 < \varepsilon .$$

Setze $F_r := \{ g \in G \mid \bar\mu(g) > r \}$ für $r > 0$.

Für $r$ genügend klein ist dann $F_r$ Følnermenge zu $E, \varepsilon$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sei $E \subset\subset G$ endlich, $\varepsilon > 0$, und sei $F \subset\subset G$ endlich eine Følnermenge zu $E, \varepsilon$.

Sei $p_F \in B(\ell^2(G))$ die Projektion auf $\mathrm{span}\{\delta_g \mid g \in F\} \subset \ell^2(G)$.

$\rightsquigarrow p_F B(\ell^2(G)) p_F \cong M_F \; (\cong C^*(e_{g,h} \mid g,h \in F,\; e_{g,h}^* = e_{h,g},\; e_{g,h} e_{k,l} = \delta_{h,k}\, e_{g,l}))$.

Für $s \in G$ gilt

$$e_{g,g}\,\lambda_s\, e_{h,h} = \delta_{g,sh}\cdot e_{g,h} \qquad [\text{denn } \lambda_s(\eta_h) = \eta_{sh}]$$

und wegen $p_F = \sum_{g\in F} e_{g,g}$ gilt

$$p_F\,\lambda_s\, p_F = \sum_{g,h\in F} e_{g,g}\,\lambda_s\, e_{h,h} = \sum_{g,h\in F} \delta_{g,sh}\cdot e_{g,h} = \sum_{g\in F\cap sF} e_{g,s^{-1}g}.$$

$$\left[\begin{array}{l} g \ \cdots\cdots\ F \\ sh \ \cdots\cdots\ sF \end{array} \Rightarrow h = s^{-1}g,\ g \in F\cap sF\right]$$

Setze

$$\psi_F : C^*_r(G) \to M_F, \quad x \mapsto p_F\, x\, p_F$$

und

$$\varphi_F : M_F \to C^*_r(G), \quad e_{g,h} \mapsto \frac{1}{|F|}\cdot \lambda_g \lambda_h^{-1},$$

dann sind $\psi_F$ und $\varphi_F$ unital (klar) und v.p.: $\psi_F$ ist Kompression

$$\varphi_F^{(F)}\left((e_{g,h})_{g,h\in F}\right) = \begin{pmatrix} \vdots & \\ \lambda_g & 0 \\ \vdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sim \lambda_h^* \sim \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0 \overset{3.23}{\Rightarrow} \varphi_F \text{ v.p.}$$

Es gilt $1 \geq \frac{|F\cap sF|}{|F|} = \frac{|F\cup sF|}{|F|} - \frac{|F\triangle sF|}{|F|} \overset{\text{s.2, Følner}}{\geq} 1-\varepsilon$ und wir erhalten für $s\in E$

$$\varphi_F\psi_F(\lambda_s) = \varphi_F\Big(\sum_{g\in F\cap sF} e_{g,s^{-1}g}\Big) = \sum_{g\in F\cap sF} \frac{1}{|F|}\cdot\lambda_g\lambda_{(s^{-1}g)}^{-1}$$

$$= \sum_{g\in F\cap sF} \frac{1}{|F|}\cdot \lambda_s = \frac{|F\cap sF|}{|F|}\cdot\lambda_s \approx_\varepsilon \lambda_s.$$

$\mathrm{span}\{\lambda_s\} \subseteq_{\text{dicht}} C^*_r(G) \Rightarrow$ Beh.

(iii) $\Rightarrow$ (i): $\left(C^*_r(G) \xrightarrow{\psi_\gamma} F_\gamma \xrightarrow{\varphi_\gamma} C^*_r(G)\right)_{\gamma\in\Gamma}$, $\varphi_\gamma, \psi_\gamma$ v.p. kontraktiv,

$\cap$ $\quad \tilde{\psi}_\gamma \ldots ?$

$B(\ell^2(G))$ [Arveson] $\qquad \varphi_\gamma \psi_\gamma \to \mathrm{id}_{C^*_r(G)}$ punktw.

$\rightsquigarrow \varphi_\gamma \tilde{\psi}_\gamma \in B(B(\ell^2(G)), C^*_r(G)) \subset B(B(\ell^2(G)), W^*(G))$

$\rightsquigarrow \varphi_\gamma \tilde{\psi}_\gamma$ besitzt w*-Häufungspunkt $\qquad$ ist Dualraum (vgl. S. 27)

$\Phi : B(\ell^2(G)) \to W^*(G)$

[Besitzt kanonische Spur $\tau$, $\tau\left(\sum_{g\in G} \alpha_g \cdot \lambda_g\right) = \alpha_e$]

$\Phi|_{C^*_r(G)} = \mathrm{id}_{C^*_r(G)} \Rightarrow C^*_r(G)$ ist im mult. Bereich von $\Phi$

$\Rightarrow$ Für $f \in \ell^\infty(G)$, $s \in G$ gilt

$$\tau \circ \Phi(m_{s.f}) = \tau \circ \Phi(\lambda_s m_f \lambda_{s^{-1}}) = \tau(\lambda_s \Phi(m_f) \lambda_{s^{-1}}) = \tau(\Phi(m_f))$$

$\Rightarrow f \mapsto \tau \circ \Phi(m_f)$ ist invariantes Mittel. $\square$

5.47 B.: (i) $G = \mathbb{Z}$ 

$F_n := [-n, n] \cap \mathbb{Z}$ bilden Følnermengen.

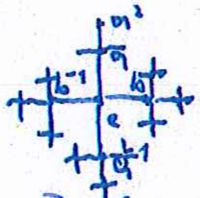
$\mu(f) := \lim_{\omega} \frac{1}{|F_n|} \cdot \sum_{n \in F_n} f(n)$ für $\omega \in \beta\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}$ ein freier Ultrafilter,

dann wird $\mu \in S(\ell^\infty(\mathbb{Z}))$ invariantes Mittel.

(ii) $G = \mathbb{F}_2 = \{$ reduzierte Wörter in $a, b, a^{-1}, b^{-1} \} \cup \{e\}$

die freie Gruppe mit 2 Erzeugern. "leeres Wort"

Cayley Graph:




$\mathbb{F}_2$ besitzt eine paradoxe Zerlegung:

$$\mathbb{F}_2 = \{a \ldots\} \sqcup \{a^{-1} \ldots\} \sqcup (\{b \ldots\} \setminus \{e, b, b^2, \ldots\}) \sqcup (\{b^{-1} \ldots\} \cup \{e, b, b^2, \ldots\})$$

$$= \{a \ldots\} \sqcup a\{a^{-1} \ldots\}$$

$$= b^{-1}(\{b \ldots\} \setminus \{e, b, b^2, \ldots\}) \sqcup (\{b^{-1} \ldots\} \cup \{e, b, b^2, \ldots\})$$

$\rightsquigarrow$ $\mathbb{F}_2$ besitzt kein invariantes Mittel.

$\mathbb{F}_2 \subset SO(3)$ $\rightsquigarrow$ Banach-Tarski Paradoxon: $\bigcirc \rightsquigarrow \bigcirc\bigcirc$