4. Der Satz von Choi-Effros

4.1 Prop.: Sei B eine C^*-Algebra und $J \trianglelefteq B$ ein Ideal. Sei $\varphi : M_n \to B/J$ v.p. unital (bzw. kontraktiv). Dann hat φ einen v.p. unitalen (bzw. kontraktiven) Lift $\bar\varphi : M_n \to B$, d.h. $\pi \circ \bar\varphi = \varphi$ (wo $\pi : B \to B/J$).

Bew.: $0 \le \varphi^{(n)}\Big(\underbrace{\sum_{i,j=1}^{n} e_{ij} \otimes e_{ij}}_{\geq 0 \text{ [warum?]}}\Big) = \sum_{i,j} \varphi(e_{ij}) \otimes e_{ij} \in B/J \otimes M_n \cong B\otimes M_n / J \otimes M_n$

Dann existiert $0 \le \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} \otimes e_{ij} \in B \otimes M_n$ mit

$\sum_{i,j} \varphi(e_{ij}) \otimes e_{ij} = \sum_{i,j} \pi(b_{ij}) \otimes e_{ij}$.

Es gilt dann $\varphi(e_{ij}) = \pi(b_{ij})$ für alle i,j.

Definiere $\varphi' : M_n \to B$ linear durch

$$(\alpha_{ij})_{ij} \mapsto \sum_{ij} \alpha_{ij} \cdot b_{ij},$$

dann gilt $\pi\varphi' = \varphi$. Weiter gilt

$$(\varphi')^{(n)}\Big(\sum_{i,j} e_{ij}\otimes e_{ij}\Big) = \sum_{i,j} \varphi'(e_{ij}) \otimes e_{ij} = \sum_{ij} b_{ij} \otimes e_{ij} \geq 0 \overset{\text{Satz 3.23 (iii)}\Rightarrow\text{(i)}}{\Longrightarrow} \varphi' \text{ ist v.p.}$$

Wir haben also einen v.p. Lift φ', der jedoch nicht notwendigerweise unital (bzw. kontraktiv) ist.

B, φ unital:

Setze $h := \varphi'(1_A) - 1_B$, dann ist $h \in J = \ker \pi$, denn φ ist unital.

Wähle $g \in S(M(B))$ und definiere $\bar{\varphi} : M_n \to B$ durch

$$\bar{\varphi}(x) := (1_B + h_+)^{-\frac{1}{2}} (\varphi'(x) + g(x) \cdot h_-)(1_B + h_+)^{-\frac{1}{2}} \in \varphi'(x) + J.$$

Dann ist $\bar{\varphi}$ v.p., $\pi\bar{\varphi} = \varphi$ und $\bar{\varphi}(1_n) = 1_B$.

$$\left[\varphi'(1_n) + 1 \cdot h_- = h_+ - h_- + 1_B + 1 \cdot h_-\right]$$

nichtunitaler Fall: Übung. ∎

4.2 Sei A eine separable C^*-Algebra und $\{a_1, a_2, \ldots\} \underset{\text{dicht}}{\subset} A^1_+$.

Für $\varphi, \psi : A \to B$ v.p. kontraktiv setze

$$d_B(\varphi, \psi) := \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \|\varphi(a_k) - \psi(a_k)\|,$$

dann ist d_B eine Metrik auf $CPC(A,B)$ (bzw. $CP(A,B)$, $UCP(A,B)$).

Es gilt $d_B(\varphi_\lambda, \varphi) \xrightarrow{\lambda} 0 \iff \|\varphi_\lambda(a) - \varphi(a)\| \to 0,\ a \in A$

sowie $(\varphi_\lambda)_\Lambda$ Cauchy bzgl. $d_B \iff \varphi_\lambda(a)$ Cauchy, $a \in A$

für beschränkte Netze $(\varphi_\lambda)_\Lambda$. [warum?]

Prop. Für $J \triangleleft B$, $B \xrightarrow{\pi} B/J$ gilt

$$d_{B/J}(\pi\varphi, \pi\psi) \leq d_B(\varphi, \psi)$$

und $d_{B/J}(\pi\varphi, \pi\psi) = \inf\{ d_B(\varphi, \psi') \mid \psi' : A \to B \text{ v.p. kontraktiv}, \pi\psi' = \pi\psi\}$.

Bew.: "$\leq$": $$d_{B/J}(\pi\varphi, \pi\psi) = \sum_k 2^{-k} \|\pi\varphi(a_k) - \pi\psi^{(\prime)}(a_k)\|$$
$$\leq \sum_k 2^{-k} \|\varphi(a_k) - \psi^{(\prime)}(a_k)\|$$
$$= d_B(\varphi, \psi^{(\prime)}) \quad (\text{falls } \pi\psi' = \pi\psi).$$

"$\geq$": Sei $(h_\lambda)_\Lambda \subset J$ eine quasizentrale appr. Eins,

d.h. $(h_\lambda)_\Lambda$ ist appr. Eins für J und

$$[h_\lambda, b] \to 0, \; b \in B.$$

[Sei $(e_\gamma)_\Gamma$ appr. Eins für J, dann ex. $(h_\lambda)_\Lambda \subset \overline{\mathrm{conv}(e_\gamma)}$ quasizentral; siehe auch Hahn-Banach.]

Für $b \in B$ gilt
$$\|\pi(b)\| \overset{[\text{warum?}]}{=} \lim_\lambda \|b(1_B - h_\lambda)\| = \lim_\lambda \|(1_B - h_\lambda)^{\frac{1}{2}} b (1_B - h_\lambda)^{\frac{1}{2}}\|. \quad (*)$$
Setzen $\varphi_\lambda(.) := (1_B - h_\lambda)^{\frac{1}{2}}\varphi(.)(1_B - h_\lambda)^{\frac{1}{2}}$, $\psi_\lambda(.) := (1_B - h_\lambda)^{\frac{1}{2}}\psi(.)(1_B - h_\lambda)^{\frac{1}{2}}$,

$\bar{\varphi}_\lambda(.) := \varphi_\lambda(.) + h_\lambda^{\frac{1}{2}}\varphi(.)h_\lambda^{\frac{1}{2}}$, $\bar{\psi}_\lambda(.) := \psi_\lambda(.) + h_\lambda^{\frac{1}{2}}\varphi(.)h_\lambda^{\frac{1}{2}}$,

dann sind $\varphi_\lambda, \psi_\lambda, \bar{\varphi}_\lambda, \bar{\psi}_\lambda : A \to B$ v.p. kontraktiv [warum?],

und es gilt $\pi\varphi_\lambda = \pi\bar{\varphi}_\lambda = \pi\varphi$, $\pi\psi_\lambda = \pi\bar{\psi}_\lambda = \pi\psi$

sowie $d_B(\bar{\varphi}_\lambda, \varphi) \to 0$ [warum?].

Wegen $(*)$ gilt
$$d_{B/J}(\pi\varphi, \pi\psi) \overset{(*)}{=} \lim_\lambda d_B(\varphi_\lambda, \psi_\lambda) = \lim_\lambda d_B(\bar{\varphi}_\lambda, \bar{\psi}_\lambda) = \lim d_B(\varphi, \bar{\psi}_\lambda) \geq \inf\{d_B(\varphi, \psi') \mid \ldots\}.$$
$\square$

4.3 Prop.: Seien A, $J \lhd B$ wie oben, $\varphi_n : A \to B/J$ v.p. kontraktiv (unital), $n \in \mathbb{N}$, mit v.p. kontraktiven (unitalen) Lifts $\Theta_n : A \to B$.

Falls $\varphi : A \to B/J$ v.p. kontraktiv (unital) ist und mit $d_{B/J}(\varphi_n, \varphi) \xrightarrow{n \to \infty} 0$, so ex. ein v.p. kontraktiver (unitaler) Lift $\bar{\varphi} : A \to B$ für φ.

D.h.: $\{\psi \in CPC(A, B/J) \mid \psi$ hat v.p. kontraktiven Lift$\} \subset CPC(A, B/J)$ $d_{B/J}$-abg.

Beweis: Wir dürfen $d_{B/J}(\varphi_n, \varphi) < \frac{1}{2^{n+1}}$ annehmen.

Setze $\psi_0 := \Theta_0$, $\psi_1 := \Theta_1$.

Seien $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n : A \to B$ v.p. kontraktiv mit $\pi \psi_k = \varphi_k$ und $d(\psi_{k-1}, \psi_k) \le \frac{1}{2^{k-1}}$, $k = 1, \dots, n$ bereits konstruiert.

Es gilt

$$\inf\{d_B(\psi_n, \Theta) \mid \Theta : A \to B \text{ v.p. kontraktiv}, \pi\Theta = \varphi_{n+1}\} \overset{\text{Prop. 4.2}}{=} d_{B/J}(\pi\psi_n, \pi\Theta_{n+1}) = d_{B/J}(\varphi_n, \varphi_{n+1}) < \frac{1}{2^n}.$$

$\Rightarrow \exists\, \psi : A \to B$ v.p. kontraktiv mit

$\pi\psi = \varphi_{n+1}$ und $d_B(\psi_n, \psi) < \frac{1}{2^n}$.

Setze $\psi_{n+1} := \psi$.

Induktiv liefert $(\psi_n)_{\mathbb{N}}$ Cauchy bzgl. d_B.

$\rightsquigarrow (\psi_n(a))_{\mathbb{N}}$ ist Cauchy in B für jedes $a \in A$.

Def. $\bar{\varphi}(a) := \lim_{n \to \infty} \psi_n(a)$, dann ist $\bar{\varphi} : A \to B$ v.p. kontraktiv und $\pi\bar{\varphi} = \varphi$. □

4.4 Def.: Seien A, B C^*-Algebren, $\varphi: A \to B$ v.p. kontraktiv.

Dann heißt φ nuklear, falls gilt:

$\forall\, \varepsilon > 0$, $\mathfrak{F} \subset\subset A$ endlich $\exists$ F endl. dim. C^*-Algebra,

$A \xrightarrow{S} F \xrightarrow{\sigma} B$ v.p. kontraktiv : $\|\sigma \circ S(a) - \varphi(a)\| < \varepsilon$, $a \in \mathfrak{F}$.

M.a.W.: Es existiert ein System $(A \xrightarrow{S_\lambda} F_\lambda \xrightarrow{\sigma_\lambda} B)_{\lambda \in \Lambda}$ mit $\sigma_\lambda S_\lambda \xrightarrow{\lambda} \varphi$ punktw.

Man kann immer F_λ durch M_{k_λ} ersetzen [warum?].

Falls A separabel ist, so kann man immer $\Lambda = \mathbb{N}$ wählen.

4.5 Satz (Choi-Effros): Sei A ein separable C^*-Algebra,

$J \triangleleft B$ und $\varphi: A \to B/J$ v.p. kontraktiv.

Falls φ nuklear ist, so ex. ein v.p. kontraktiver Lift $\bar{\varphi}: A \to B$.

(Ebenso für $\varphi: X \to B/J$.)

Bew.: Wähle $A \xrightarrow{S_n} M_{k_n} \xrightarrow{\sigma_n} B/J$ v.p. kontraktiv mit $\sigma_n \circ S_n \to \varphi$ punktw.,

dann gilt $d_{B/J}(\sigma_n S_n, \varphi) \to 0$.

Nach Prop. 4.1 existiert für jedes σ_n ein v.p. kontraktiver

Lift $\bar{\sigma}_n : M_{k_n} \to B$, $n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow$ $\sigma_n \circ S_n$ besitzt v.p. kontraktiven Lift, $n \in \mathbb{N}$.

$\overset{\text{Prop. 4.3}}{\Longrightarrow}$ φ besitzt v.p. kontraktiven Lift $\bar{\varphi}: A \to B$. $\square$

4.6 **Def.:** Eine C^*-Algebra A hat die vollständig positive Approximationseigenschaft, falls id_A nuklear ist.

4.7 **Satz** (Choi-Effros; Kirchberg): Eine C^*-Algebra A ist nuklear genau dann wenn id_A nuklear ist.

Bew.: "$\Leftarrow$": Sei B eine weitere C^*-Algebra und $(A \xrightarrow{\psi_\lambda} F_\lambda \xrightarrow{\varphi_\lambda} A)_\Lambda$ ein System von v.p. kontraktiven Approximationen mit F_λ endlichdimensional und $\varphi_\lambda \psi_\lambda \xrightarrow{\lambda} id_A$ punktw.

Die Abbildungen $\psi_\lambda \odot id_B : A \odot B \to F_\lambda \odot B$ und $\varphi_\lambda \odot id_B : F_\lambda \odot B \to A \odot B$ haben v.p. kontraktive Fortsetzungen $\psi_\lambda \otimes_{min} id_B : A \otimes_{min} B \to F_\lambda \otimes_{min} B$ und $\varphi_\lambda \otimes_{max} id_B : F_\lambda \otimes_{max} B \to A \otimes_{max} B$.

[gilt für *-Homomorphismen; mit Stinespring auch für v.p. Abbildungen (für $\otimes_{max}$ benutze eine Stinespring Dilatation mit kommutierenden Bildern von F_λ und B).]

Diese enthalten v.p. kontraktiven Abb.

$S_\lambda := (\varphi_\lambda \otimes_{max} id_B)(\psi_\lambda \otimes_{min} id_B) : A \otimes_{min} B \to A \otimes_{min} F_\lambda \cong A \otimes_{max} F_\lambda \to A \otimes_{max} B.$

Für $x = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i \in A \odot B$ gilt

$\|S_\lambda(x) - x\|_{max} = \|\sum_{i=1}^{n} (\varphi_\lambda \psi_\lambda(a_i) - a_i) \otimes b_i\| \le \sum_{i=1}^{n} \|\varphi_\lambda \psi_\lambda(a_i) - a_i\| \cdot \|b_i\| \xrightarrow{\lambda} 0.$

S_λ kontraktiv $\Rightarrow \|S_\lambda(x)\|_{max} \le \|x\|_{min}$

$\Rightarrow \|x\|_{max} \le \|S_\lambda(x)\|_{max} + \|S_\lambda(x) - x\|_{max} \le \|x\|_{min} + \varepsilon$

$\Rightarrow \|\cdot\|_{max} = \|\cdot\|_{min}$ auf $A \odot B$.

„$\Rightarrow$" (Idee):

1. $(A \odot B)^*_+ := \{ f : A \odot B \to \mathbb{C}$ linear $\mid f(x^*x) \ge 0$ für $x \in A \odot B \}$ (vgl. 1.16)
   $\cup$ -(1.20)

   $(A \odot B)^*_{++} := \{ f : A \odot B \to \mathbb{C}$ linear $\mid f = g \otimes \sigma$, $g : A \to \mathbb{C}$ pos., $\sigma : B \to \mathbb{C}$ pos. $\}$

   Nach Satz 1.19, 1.20 gilt

   $\|x\|_{max}^2 = \sup \{ \frac{f(y^* x^* x y)}{f(y^* y)} \mid f \in (A \odot B)^*_+, y \in A \odot B, f(y^*y) \neq 0 \},$

   $\|x\|_{min}^2 = \sup \{ \quad \sim \quad f \in (A \odot B)^*_{++} \quad \sim \quad \}.$

   Zeige: A nuklear $\Rightarrow$ conv $(A \odot B)^*_{++} \underset{w^*\text{-dicht}}{\subset} (A \odot B)^*_+$ für alle B.

2. $\sigma: \mathcal{B} \to \mathbb{C}$ p.o. $\Rightarrow \sigma^{(n)}: M_n(\mathcal{B}) \to M_n$ positiv

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{B}^*$ ist Matrix-geordneter Raum und man kann von v.p. Abbildungen $\mathcal{A} \to \mathcal{B}^*$ sprechen.

Zeige:

$$(\mathcal{A} \odot \mathcal{B})^*_+ \xrightarrow{\cong} CP(\mathcal{A}, \mathcal{B}^*)$$

$$[f \mapsto T_f, \ T_f(a)(b) = f(a \otimes b)]$$

$$\cup \qquad\qquad \cup$$

$$\mathrm{conv}(\mathcal{A} \odot \mathcal{B})^*_{++} \sim \{T \in CP(\mathcal{A}, \mathcal{B}^*) \mid T \text{ hat endl. Rang}\} =: CP_{f}(\mathcal{A},\mathcal{B}^*)$$

$[\rho \otimes \sigma$ (symmetrisch) $\rightsquigarrow$ Vektorzustand bzgl. $\xi := \xi_\rho \otimes \xi_\sigma \in \mathcal{H}_\rho \otimes \mathcal{H}_\sigma]$

!

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{A}$ nuklear $\Rightarrow CP_f(\mathcal{A}, \mathcal{B}^*) \underset{\substack{\text{dicht} \\ (\text{pktw.-}w^*)}}{\subset} CP(\mathcal{A}, \mathcal{B}^*)$ für alle $\mathcal{B}$.

3. Sei $(\pi : A \to \mathcal{B}(\mathcal{H}), \xi)$ eine zyklische Darstellung,

dann kann man $\phi : \pi(A)'' \to (\pi(A)')^*$ definieren durch

$$\phi(x)(y) := \langle \xi, xy\xi \rangle, \quad x \in \pi(A)'', \ y \in \pi(A)'.$$

ϕ ist w.p. und aus Z. folgt, dass

$$A \xrightarrow{\pi} \pi(A) \hookrightarrow \pi(A)'' \xrightarrow{\Phi} (\pi(A)')^*$$

nuklear ist.

Zeige: $A \to \pi(A) \hookrightarrow \pi(A)''$ ist dann auch nuklear.

$\longrightarrow A \xrightarrow{\cong} \underbrace{\pi_u(A)}_{\text{universelle Darst.}} \hookrightarrow \pi_u(A)'' \cong A^{**}$ ist nuklear

Zeige: $A \xrightarrow{\cong} \pi_u(A)$ ist nuklear (Kommutant und Kaplanskys Dichtesatz). $\square$