2. Nuklearität und Exaktheit

2.1 Def.: Eine C^*-Algebra A heißt nuklear, falls für jede C^*-Algebra B nur eine C^*-Norm auf $A \odot B$ ex. (d.h. $\|\cdot\|_{min} = \|\cdot\|_{max}$, bzw. $A \otimes_{max} B = A \otimes_{min} B$).

2.2 Prop.: (i) A, B nuklear $\Rightarrow$ $A \oplus B$, $A \otimes B$ nuklear.

(ii) $A = \varinjlim A_i$, A_i nuklear für alle i $\Rightarrow$ A nuklear.

(iii) $0 \to J \to A \to A/J \to 0$, dann gilt: A nuklear $\Leftrightarrow$ J, A/J nuklear.

Bew.: (i) $\oplus$: ✓ $\otimes$: Assoziativität von $\otimes_{max}$ und $\otimes_{min}$

(ii) klar für injektive Verbindungsabbildungen (warum?); i.a. benutze (iii).

(iii) "$\Rightarrow$": J nuklear,

$$\begin{tikzcd}
J \otimes_{max} B \arrow[r, two heads, "?"] & \overline{J \odot B}^{\|\cdot\|_{max, A\otimes B}} \arrow[d] \arrow[r, phantom, "\triangleleft"] & A \otimes_{max} B \arrow[d, phantom, "\|"] \\
& J \otimes_{min} B \arrow[r, hook, "1.25"] & A \otimes_{min} B \; [\|\cdot\|_{min, J\odot B} = \|\cdot\|_{min, A \odot B}|_{J \odot B}]
\end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow \overline{J \odot B}^{\|\cdot\|_{max, A\otimes B}} = J \otimes_{min} B$$

[dank 1.20 und eindeutiger Fortsetzung von Zuständen]

Falls nun $\pi : J \odot B \to B(H)$ eine nichtdeg. Darst. ist und (h_λ), (g_ν) appr. Einsen für J bzw. B sind, so definieren wir $\sigma : A \odot B \to B(H)$ durch

$$\sigma(a \otimes b) := \text{s.o.-}\lim_{\lambda,\nu} \pi(a h_\lambda \otimes b g_\nu).$$

σ existiert und setzt π fort.

$\Rightarrow$ für $x \in J \odot B \subset J \otimes_{max} B$ gilt:

$$\begin{aligned} \|x\|_{max, J\odot B} &= \sup\{\|\pi(x)\| \mid \pi \text{ Darst. von } J \odot B\} \\ &\leq \sup\{\|\sigma(x)\| \mid \sigma \text{ Darst. von } A \odot B\} \\ &= \|\rho(x)\|_{max, A\odot B} \\ &\leq \|x\|_{max, J\odot B} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \rho$ ist isometrisch

$\Rightarrow J \otimes_{max} B = J \otimes_{min} B$.

$\Rightarrow J$ ist nuklear.

A/J nuklear: später.

"$\Leftarrow$": auch später.

$\square$

2.3 z.B. (i) A endl. dimensional $\Rightarrow$ A nuklear.

Beweis: Wegen 2.2 (ii) dürfen wir $A = M_n$ annehmen.

Sei B ein C^*-Algebra, dann ist $A \odot B$ bereits vollständig bzgl. $\|\cdot\|_{min}$: Sei $(d_\lambda)_\lambda$ Cauchy bzgl. $\|\cdot\|_{min}$, wo $d_\lambda = \sum_{i,j=1}^{n} e_{ij} \otimes b_{ij,\lambda}$ mit $(b_{ij,\lambda})_\lambda \subset B$, $i,j = 1,\dots,n$, dann ist $e_{ij} \otimes b_{ij,\lambda} = (e_{ii} \otimes 1_{\tilde{B}})\, d_\lambda\, (e_{jj} \otimes 1_{\tilde{B}})$ ebenfalls Cauchy $\Rightarrow$ $b_{ij,\lambda}$ ist Cauchy bzgl. $\|\cdot\|_B$, denn $\|e_{ij} \otimes b\|_{min} = \|e_{ij}\|\,\|b\| = \|b\|$ nach Bem. 1.25(i) $\Rightarrow (b_{ij,\lambda})_\lambda$ konvergiert für alle ij $\Rightarrow d_\lambda$ konvergiert $\Rightarrow (A \odot B, \|\cdot\|_{min})$ ist C^*-Algebra $\Rightarrow \gamma = \|\cdot\|_{min}$ für jede andere C^*-Norm γ. □

(ii) $A = C_0(X)$ ist nuklear nach Satz 1.21

(iii) A AF (z.B. M_{2^∞}) ist nuklear

(iv) A AH (z.B. A_θ) ist nuklear

(v) Die Toeplitzalgebra $\mathcal{T}$ ist nuklear: $0 \to K \to \mathcal{T} \to C(S^1) \to 0$, Prop. 2.4(i)

(vi) $C^*_{(r)}(G)$?

(vii) $A \rtimes_{\alpha,(r)} G$?

2.4 Prop. $A \otimes_{max} -$ ist ein exakter Funktor für jede C*-Algebra A.

Bew.: Für Funktorialität benutze Prop. 1.25 $\leadsto$ $\pi : B \to C$ induziert $id_A \otimes_{max} \pi : A \otimes_{max} B \to A \otimes_{max} C$.

Sei nun $0 \to J \xrightarrow{\iota} B \xrightarrow{\pi} B/J \to 0$ exakt.

z.z.: $0 \to \underset{①}{A \otimes_{max} J} \xrightarrow{id_A \otimes_{max} \iota} \underset{②}{A \otimes_{max} B} \xrightarrow{id_A \otimes_{max} \pi} \underset{③}{A \otimes_{max} B/J} \to 0$ ist exakt.

$id_A \otimes_{max} \pi$ hat dichtes und vollständiges Bild $\leadsto$ surjektiv, d.h. Exaktheit in ③.

$id_A \otimes_{max} \iota$ injektiv (d.h. Exaktheit in ①):

Sei $f \in S(A \otimes_{max} J) \overset{1.19}{\approx} S(A \odot J)$. Sei $(u_\lambda)_\lambda$ approx. Eins für J.

$a \otimes b \mapsto \lim_\lambda f(a \otimes u_\lambda b u_\lambda)$ definiert dann eine Fortsetzung von f zu $\tilde{f} \in S(A \odot B) \overset{1.19}{\approx} S(A \otimes_{max} J)$ [Warum?]

Satz 1.19 $\Rightarrow$ $\|\,.\,\|_{A \otimes_{max} J}\big|_{A \odot J} = \|\,.\,\|_{A \otimes_{max} B}\big|_{A \odot J}$

$\Rightarrow$ $id_A \otimes_{max} \iota$ ist isometrisch auf $A \odot J$, damit aber auch auf $A \otimes_{max} J$ (wegen Stetigkeit).

Exaktheit in ②:

Wir haben $A \otimes_{max} J \triangleleft A \otimes_{max} B$ und $A \otimes_{max} J \subset \ker(id_A \otimes_{max} \pi)$. [Warum?]

$\Rightarrow$ $A \otimes_{max} B / A \otimes_{max} J \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} A \otimes_{max} B / \ker(id_A \otimes_{max} \pi) \overset{③}{\cong} A \otimes_{max} B/J$.

Weiter haben wir $A\odot B \cap A\otimes_{max} J \overset{?}{=} A\odot J$ ~~(Übung)~~

$$\Rightarrow A\odot B/J = A\odot B/_{A\odot J} \overset{?}{=} A\odot B/_{A\odot B\,\cap\, A\otimes_{max} J} \overset{\subseteq}{\text{dicht}} A\otimes_{max} B/_{A\otimes_{max} J}$$

$$\Rightarrow A\otimes_{max} B/J \overset{g}{\twoheadrightarrow} A\otimes_{max} B/_{A\otimes_{max} J}$$

$\sigma\circ g|_{A\odot B/J} = id_{A\odot B/J} \Rightarrow \sigma\circ g$ ist isometrisch auf $A\odot B/J$

dicht $\Rightarrow \sigma\circ g$ ist isometrisch

$\Rightarrow g$ ist Iso

$\Rightarrow \sigma$ injektiv

$\Rightarrow A\otimes_{max} J = \ker(id_A\otimes_{max}\pi)$

$\Rightarrow$ Exaktheit in (2). $\square$

2.5 Def.: Eine C^*-Algebra A heißt exakt, falls $A\otimes_{min}$ – ein exakter Funktor ist, d.h.: $0\to J \xrightarrow{\iota} B \xrightarrow{\pi} B/J \to 0$ exakt

$$\Rightarrow 0\to A\otimes_{min} J \xrightarrow{id_A\otimes_{min}\iota} A\otimes_{min} B \xrightarrow{id_A\otimes_{min}\pi} A\otimes_{min} B/J \to 0$$

ist exakt

2.6 <u>Bem.</u>: (i) A nuklear $\Rightarrow$ A exakt nach Prop. 2.4.

(ii) Bew. von "$\Leftarrow$" aus Prop. 2.2 (iii):

z.z.: $J \triangleleft A$, $J, A/J$ nuklear $\Rightarrow$ A nuklear.

Betrachte

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & B\otimes_{max} J & \to & B\otimes_{max} A & \to & B\otimes_{max} A/J & \to & 0 \quad \text{exakt} \\ & & \cong\downarrow \varphi_J & & \downarrow \varphi_A & & \cong\downarrow \varphi_{A/J} & & \\ 0 & \to & B\otimes_{min} J & \to & B\otimes_{min} A & \to & B\otimes_{min} A/J & \to & 0 \quad (*) \\ & & (1) & & (2) & & (3) & & \end{array}$$

d.h. Wollen Beweis Exaktheit in (1)–(3).

Wissen $B\odot A \cap B\otimes_{min} J = B\odot J$ (s.o.) und

$$\rightsquigarrow B\odot A/J = B\odot A/B\odot J \xrightarrow{\text{surjektiv (2.4)}} \underset{\overset{\|}{B\odot A/B\odot A\cap B\otimes_{min} J}}{B\odot A/B\odot A\cap B\otimes_{min} J} \underset{\text{dicht}}{\subset} B\otimes_{min} A/B\otimes_{min} J$$

$\Rightarrow$ $\|.\|_{min}$ auf $B\otimes_{min} A$ induziert C^*-Norm γ auf $B\odot A/J$ und $B\otimes_\gamma A/J \cong B\otimes_{min} A/B\otimes_{min} J$

A/J nuklear $\Rightarrow$ $\gamma = \|.\|_{min,\, B\odot A/J}$ $\Rightarrow$ $B\otimes_\gamma A/J \cong B\otimes_{min} A/J$

$$\Rightarrow 0 \to B\otimes_{min} J \to B\otimes_{min} A \to \underset{\overset{\|}{B\otimes_{min} A/J}}{\overset{B\otimes_{min} A/B\otimes_{min} J}{\overset{\|}{B\otimes_\gamma A/J}}} \to 0 \text{ ist exakt}$$

$\Rightarrow$ (*) ist exakt. $\overset{\text{5-Lemma}}{\Rightarrow}$ φ_A ist Isomorphismus. ∎

2.7 Satz (Kirchberg; Wassermann): Eine C^*-Unteralgebra einer exakten C^*-Algebra ist exakt.
Insbesondere sind C^*-Unteralgebren von nuklearen C^*-Algebren exakt.

Bew. (Idee): Seien $A \subset C$ C^*-Algebren und sei C exakt.
Sei $0 \to J \to B \xrightarrow{\pi} B/J \to 0$ eine beliebige kurze exakte Sequenz von C^*-Algebren.
Es genügt zu zeigen: $A \otimes_{min} J = \ker id_A \otimes_{min} \pi$ ["$\subset$" ist klar]
(d.h. Exaktheit von $0 \to A\otimes_{min} J \to A\otimes_{min} B \to A\otimes_{min} B/J \to 0$ in der Mitte).

1. Es gilt $\underbrace{C\otimes_{min} J \cap A\otimes_{min} B}_{\subset C\otimes_{min} B} = A\otimes_{min} J$ ["$\supset$" klar, "$\subset$" appr. E.]
2. Sei $\varphi \in S(A)$, dann betrachte die 'slice map'
$$\varphi \otimes id_B : A \odot B \to \mathbb{C} \odot B = B$$
$$a\otimes b \mapsto \varphi(a) b$$
$\varphi \otimes id_B$ ist stetig bzgl. $\|\cdot\|_{min}$ und wir erhalten eine stetige Fortsetzung $\varphi \otimes_{min} id_B : A\otimes_{min} B \to B$. [Übung]
3. Betrachte $K_J := \{x \in A\otimes_{min} B \mid \varphi\otimes_{min} id_B(x^*x) \in J$ für alle $\varphi \in S(A)\}$ und zeige $K_J = \ker(id_A \otimes_{min} \pi)$ [benutze 1.20].
4. $K_J \subset A\otimes_{min} J$: Sei $x_0 \in K_J$.
Falls $f \in S(C)$, so ist $\varphi := f|_A$ bis auf Normierung in $S(A)$ (oder $\varphi = 0$) und es gilt $f\otimes_{min} id_B(x_0^* x_0) = \varphi\otimes_{min} id_B(x_0^* x_0) \in J$
$\Rightarrow x_0 \in \{x \in C\otimes_{min} B \mid f\otimes_{min} id_B(x^*x) \in J$ für alle $f \in S(C)\} \overset{3.}{=} \ker(id_C \otimes_{min} \pi) \overset{C \text{ exakt}}{=} C\otimes_{min} J$.
$\Rightarrow x_0 \in A\otimes_{min} B \cap C\otimes_{min} J \overset{1.}{=} A\otimes_{min} J$. □