Operatoralgebren II

1. Tensorprodukte

1.1 <u>Erinnerung</u>: Seien V, W K-Vektorräume.
Sei X ein weiterer K-Vektorraum und
$\varphi: V \times W \to X$ bilinear.
Dann heißt (X, φ) Tensorprodukt von V und W,
falls folgende universelle Eigenschaft gilt:

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\text{bil.}"'] & X \arrow[d, dotted, "\exists!\, \psi \text{ lin.}"] \\ & U \end{tikzcd}$$

1.2 <u>Prop./Def.</u>: (X, φ) wie oben existiert und ist eindeutig
bis auf lin. Isom.
Wir schreiben $V \otimes W$ für X und $v \otimes w$ für $\varphi(v, w)$.

Bew.: $M :=$ freier VR mit Basis $V \times W$
(bzw. $M := \{f: V \times W \to K \mid \operatorname{supp} f \text{ endlich}\}$).

$$N := \operatorname{span}\{(v_1 + v_2, w) - ((v_1, w) + (v_2, w)), (v, w_1 + w_2) - ((v, w_1) + (v, w_2)), (\lambda \cdot v, w) - \lambda \cdot (v, w), (v, \lambda \cdot w) - \lambda \cdot (v, w) \mid \lambda \in K, v_1, v_2, v \in V, w_1, w_2, w \in W\}$$

Setze $X := M/N$ und $\varphi((v, w)) := (v, w) + N$.
Rest Übung. $\square$

1.3 **Prop.:** Seien A, B K-Algebren, dann ist $A \otimes B$ K-Algebra mit $(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$.
A, B *-Algebren, dann ist $A \otimes B$ *-Algebra mit $(a \otimes b)^* = a^* \otimes b^*$.
A, B kommutativ / unital, so auch $A \otimes B$.

Bew.: Betrachte M wie in 1.2 und überprüfe, dass Multiplikation auf M/N wohldefiniert und assoziativ ist.
Alternativ:

$$(a,b) \in A \times B \rightsquigarrow M_{(a,b)} : A \times B \to A \otimes B \quad \text{bilinear}$$
$$(a',b') \mapsto aa' \otimes bb'$$

$$\overset{\text{u.E.}}{\rightsquigarrow} m_{(a,b)} : A \otimes B \to A \otimes B \quad \text{linear}$$
$$m_{(a,b)}(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$$

$$\rightsquigarrow m : A \times B \to L(A \otimes B, A \otimes B) \quad \text{bilinear}$$
$$(a,b) \mapsto m_{(a,b)}$$

$$\rightsquigarrow \quad A \otimes B \to L(A \otimes B, A \otimes B) \quad \text{linear}$$

$$\rightsquigarrow \quad \mu : A \otimes B \times A \otimes B \to A \otimes B \quad \text{bilinear}$$

und $(A \otimes B, \mu)$ ist K-Algebra.

Rest ist klar. $\square$

1.4 Bem.: (i) A, B $*$-Algebren, dann hat $A \odot B$ als $*$-Algebra die folgende universelle Eigenschaft: Falls C eine $*$-Algebra ist und $\pi_A : A \to C$, $\pi_B : B \to C$ $*$-Homomorphismen mit $[\pi_A(A), \pi_B(B)] = 0$, so existiert genau ein $*$-Hom. $\pi : A \odot B \to C$ mit $\pi(a \otimes b) = \pi_A(a)\pi_B(b)$.

(ii) A, B, C, D $*$-Algebren, $\pi_A : A \to C$, $\pi_B : B \to D$ $*$-Hom.
$\Rightarrow \exists!$ $*$-Hom. $\pi_A \odot \pi_B : A \odot B \to C \odot D$ mit $\pi_A \odot \pi_B(a \otimes b) = \pi_A(a) \otimes \pi_B(b)$.

1.5 Prop./Def.: $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ HR, dann ist $\mathcal{H}_1 \odot \mathcal{H}_2$ Prä-HR mit

$$\langle \xi \otimes \eta, \xi' \otimes \eta' \rangle := \langle \xi, \xi' \rangle \cdot \langle \eta, \eta' \rangle .$$

$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 := \overline{\mathcal{H}_1 \odot \mathcal{H}_2}^{\langle .,. \rangle}$ ist das HR-Tensorprodukt.

Beweis: $\xi \in \mathcal{H}_1, \eta \in \mathcal{H}_2 \overset{\text{u.E.}}{\rightsquigarrow} \exists!\ \tau_{\xi \otimes \eta} : \mathcal{H}_1 \odot \mathcal{H}_2 \to \mathbb{C}$ linear mit $\tau_{\xi\otimes\eta}(\xi' \otimes \eta') = \langle \xi, \xi' \rangle \cdot \langle \eta, \eta' \rangle$.

$(\xi, \eta) \mapsto \overline{\tau_{\xi \otimes \eta}}$ bilinear $\rightsquigarrow \xi \otimes \eta \mapsto \tau_{\xi \otimes \eta}$ antilinear
$\rightsquigarrow \langle .,. \rangle : \mathcal{H}_1 \odot \mathcal{H}_2 \times \mathcal{H}_1 \odot \mathcal{H}_2 \to \mathbb{C}$ sesquilinear.

pos. def.: Sei $z = \sum_{i=1}^n \xi_i \otimes \eta_i \in \mathcal{H}_1 \odot \mathcal{H}_2$; wähle ONB $(\zeta_1, \dots, \zeta_m)$ für $\operatorname{span}(\eta_i)$, dann ist $z = \sum_{i=1}^m \xi_i' \otimes \zeta_i$ für $\xi_i' \in \mathcal{H}_1$ geeignet und
$\langle z, z \rangle = \sum_{i=1}^m \|\xi_i'\|^2 \geq 0$; $\langle z, z \rangle = 0 \Leftrightarrow \xi_i' = 0$, $i = 1, \dots, m$. □

1.6 <u>Bem.</u>: $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1) \odot \mathcal{B}(\mathcal{H}_2) \overset{\iota}{\hookrightarrow} \mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$ (Übung.) ~~[illegible]~~

mit $(a \otimes b)(\xi \otimes \eta) = a(\xi) \otimes b(\eta)$

(Die Abb. ist i. a. nicht surjektiv.)

Existenz von ι: Benutze 1.4(i) mit $\pi_1(a)(\xi \otimes \eta) = a\xi \otimes \eta$, $\pi_2(b)(\xi \otimes \eta) = \xi \otimes b\eta$, $\pi_1(a), \pi_2(b)$ beschränkt: 1.5.

1.7 <u>Frage</u>: A, B C^*-Algebren. Welche C^*-Normen ex. auf $A \odot B$?

1.8 <u>Bem.</u>: Falls $\gamma : A \odot B \to \mathbb{R}^+$ eine C^*-Norm ist, so ist $A \otimes_\gamma B := \overline{A \odot B}^{\gamma}$ eine C^*-Algebra.

1.9 <u>Prop.</u>: Seien A, B C^*-Algebren.

(i) Für $*$-Darstellungen $\pi_A : A \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$, $\pi_B : B \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ def. $(\pi_A \otimes \pi_B)(a \otimes b) := \iota(\pi_A(a) \otimes \pi_B(b))$ eine $*$-Darst. $\pi_A \otimes \pi_B : A \odot B \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$.

Falls π_A und π_B treu sind, so auch $\pi_A \otimes \pi_B$. Insbesondere ist ι aus 1.6 treu.

(ii) Die Abb. $\|\cdot\|_{min} : A \odot B \to \mathbb{R}^+$, geg. durch

$$\Big\|\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i\Big\|_{min} := \sup\Big\{\Big\|(\pi_A \otimes \pi_B)\Big(\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i\Big)\Big\| \;\Big|\; \pi_A, \pi_B \text{ } *\text{-Darst.}\Big\}$$

ist eine C^*-Norm.

Bew. zu (i) $\left.\begin{array}{l}\text{Bem. } 1.4\,(ii)\\ +\text{Bem. } 1.6\end{array}\right\} \Rightarrow \exists$ ^-Darst. $\pi_A \otimes \pi_B = L\circ(\pi_A \odot \pi_B)$

Seien π_A, π_B treu, $0 \neq c \in \ker(\pi_A \otimes \pi_B)$.

Es gilt $c = \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i$ für geeignete a_i, b_i, n; o.E. b_i lin. unabh.

π_B treu $\Rightarrow \pi_B(b_i)$ lin. unabh.

Für $\xi \in \mathcal{H}_1$ wähle ONB $\{\xi_1, \dots, \xi_m\}$ für $\operatorname{span}\{\pi_A(a_i)\xi\} \subset \mathcal{H}_1$.

Dann ex. $\lambda_{ij} \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, mit

$$\pi_A(a_i)\xi = \sum_{j=1}^m \lambda_{ij}\xi_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

Für $\eta \in \mathcal{H}_2$ gilt

$$0 = \pi_A \otimes \pi_B(c)(\xi \otimes \eta) = \sum_{i=1}^n \pi_A(a_i)\xi \otimes \pi_B(b_i)\eta = \sum_{j=1}^m \Big(\xi_j \otimes \sum_{i=1}^n \lambda_{ij}\cdot \pi_B(b_i)\eta\Big)$$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_{ij}\cdot \pi_B(b_i)\eta = 0, \quad j = 1, \dots, m, \ \eta \in \mathcal{H}_2$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_{ij}\cdot \pi_B(b_i) = 0, \quad j = 1, \dots, m$

$\overset{\pi_B(b_i)\text{ l.u.}}{\Rightarrow} \lambda_{ij} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \ j = 1, \dots, m$

$\Rightarrow \pi_A(a_i)\xi = 0, \quad i = 1, \dots, n, \ \xi \in \mathcal{H}_1$

$\overset{\pi_A\text{ treu}}{\Rightarrow} a_i = 0, \ i = 1, \dots, n \Rightarrow c = 0$ ↯

$\Rightarrow \pi_A \otimes \pi_B$ treu.

(ii) $\|.\|_{min}$ ist C^*-Halbnorm $\checkmark^{(*)}$ (warum?)

$\|.\|_{min}$ ist Norm nach (i), denn A und B haben treue Darstgn. □

(*) $\|.\|_{min}$ endlich: $\|(\pi_A \otimes \pi_B)(\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i)\| = \|\sum_{i=1}^n (\pi_A(a_i) \otimes 1_{\mathcal{H}_2})\, 1_{\mathcal{H}_1} \otimes \pi_B(b_i)\| \le \sum_{i=1}^n \|a_i\|\|b_i\| < \infty$

Rest Übg.

1.10 <u>Def.</u>: $A \otimes_{min} B := \overline{A \odot B}^{\|\cdot\|_{min}}$ heißt minimales (auch räumliches oder spatiales) Tensorprodukt von A u. B.

1.11 <u>Satz</u>: Seien A, B C^*-Algebren, $\pi : A \odot B \to B(\mathcal{H})$ nichtdeg. *-Darstlg.
Dann ex. eind. best. nichtdeg. *-Darstlgn.
$\pi_A : A \to B(\mathcal{H})$ und $\pi_B : B \to B(\mathcal{H})$ mit
$\pi(a \otimes b) = \pi_A(a)\pi_B(b) = \pi_B(b)\pi_A(a)$, $a \in A, b \in B$.
Falls π eine Faktordarstlg. ist (d.h. $\pi(A \odot B)''$ ist Faktor), so auch π_A und π_B.

Bew.: Falls A, B unital sind, so sind π_A, π_B gegeben durch
$\pi_A(a) = \pi(a \otimes 1_B)$, $\pi_B(b) = \pi(1_A \otimes b)$.
Im allgemeinen Fall seien $(h_\lambda), (k_\mu)$ approx. Einsen für A bzw. B; setze $\pi_A(a) := \text{s.o.-}\lim_\mu \pi(a \otimes k_\mu)$, $\pi_B(b) := \text{s.o.-}\lim \pi(h_\lambda \otimes b)$.
$\pi_A(a)$ und $\pi_B(b)$ ex.:
Für $\xi \in \mathcal{H}$, $a \in A_+$ definiert $b \mapsto \langle \xi, \pi(a \otimes b)\xi \rangle$ ein pos. lin. Fkt. f_a auf B (beschränkt nach CAI, Satz 5.3)
$\Rightarrow \lim_\mu \langle \xi, \pi(a \otimes k_\mu)\xi \rangle = \lim_\mu f_a(k_\mu)$ existiert für jedes $a \in A_+$.
Für $a \in A_+$, $\mu \le \mu'$ gilt
$\|(\pi(a \otimes k_{\mu'}) - \pi(a \otimes k_\mu))\xi\|^2 = \langle \xi, \pi(a^2 \otimes (k_{\mu'} - k_\mu)^2)\xi \rangle$
$\le \langle \xi, \pi(a \otimes (k_{\mu'} - k_\mu))\xi \rangle = f_a(k_{\mu'}) - f_a(k_\mu) < \varepsilon$ falls μ, μ' groß
$\Rightarrow \pi_A(a)$ existiert, ebenso $\pi_B(b)$.

π_A, π_B *-Darstellungen mit richtigen Eigenschaften, Übung.

Es gilt
$$\begin{array}{ccc} \pi_A(A) & \subset & \pi_B(B)' \\ \cap & & \| \text{ Bikommutantensatz} \\ \pi_A(A)'' & \subset & \pi_B(B)''' \end{array}$$

$\Rightarrow \pi_A(A)' \cap \pi_A(A)'' \subset \pi_A(A)' \cap \pi_B(B)' \subset \pi(A \odot B)'$.

Es gilt $\pi_A(A) \subset \overline{\pi(A \odot B)}^{\text{s.o.}} = \pi(A \odot B)''$

$\Rightarrow \pi_A(A)'' \subset \pi(A \odot B)''$

$\Rightarrow \pi_A(A)' \cap \pi_A(A)'' \subset \pi(A \odot B)' \cap \pi(A \odot B)'' \underset{\pi \text{ Faktordarstellung}}{=} \mathbb{C} \cdot 1_K$. $\square$

1.12 **Cor.:** Seien A, B C^*-Algebren und γ eine C^*-Halbnorm auf $A \odot B$.
Dann gilt $\gamma(a \otimes b) \leq \|a\| \|b\|$ für $a \in A, b \in B$ und γ besitzt eine eindeutige Fortsetzung zu einer C^*-Halbnorm auf $A^\sim \odot B^\sim$.

Bew.: $N := \{x \in A \odot B \mid \gamma(x) = 0\} \lhd A \odot B$;

γ induziert eine C^*-Norm auf $A \odot B/_N$.

$\rightsquigarrow C := \overline{A \odot B/_N}^{\,\bar\gamma}$ ist eine C^*-Algebra mit einer nichtdeg. treuen Darst.; wir erhalten

$\pi : A \odot B \to B(H)$ mit $\|\pi(x)\| = \bar\gamma(x+N) = \gamma(x)$, $x \in A \odot B$,

und $\gamma(a \otimes b) = \|\pi(a\otimes b)\| \overset{1.11}{=} \|\pi_A(a)\,\pi_B(b)\| \le \|\pi_A(a)\|\,\|\pi_B(b)\| \le \|a\|\,\|b\|$.

Seien $\tilde\pi_A$, $\tilde\pi_B$ Fortsetzungen auf $A^\sim$, $B^\sim$, dann ist def.

$\tilde\pi(a \otimes b) := \tilde\pi_A(a)\,\tilde\pi_B(b)$ eine Fortsetzung von π

auf $A^\sim \odot B^\sim$ ($\tilde\pi$ ex. nach Bem. 1.4(i)).

Dann ist $\tilde\gamma(x) := \|\tilde\pi(x)\|$ Fortsetzung von γ auf $A^\sim \odot B^\sim$.

Eindeutigkeit:

$$\tilde\gamma(x) = \|\tilde\pi(x)\| = \|1_H \cdot \tilde\pi(x)\|$$

$$\underset{\pi \text{ nichtdeg.}}{=} \|\text{s.o.-}\lim \pi(\underbrace{h_\lambda^{\frac12} \otimes k_\mu^{\frac12}}_{\text{approx. Eins}})\,\tilde\pi(x)\|$$

"$\le$": i.V

"$\ge$": auf Vektoren übergehen

$$= \lim_{\lambda,\mu} \|\tilde\pi(x^*)\,\pi(h_\lambda \otimes k_\mu)\,\tilde\pi(x)\|^{\frac12}$$

[Warum?]

$$= \lim_{\lambda,\mu} \|\pi(x^*(h_\lambda \otimes k_\mu)x)\|^{\frac12}$$

$$= \lim_{\lambda,\mu} \gamma(x^*(h_\lambda \otimes k_\mu)x)^{\frac12} \leftarrow \text{unabhängig von } \pi$$

□

1.13 Prop.: Die Abbildung $\|\cdot\|_{max} : A \odot B \to \mathbb{R}^+$, geg. durch

$$\|x\|_{max} := \sup\{\|\pi(x)\| \mid \pi \ {}^*\text{-Darstg. von } A \odot B\}$$

ist eine C^*-Norm auf $A \odot B$.

Für jede weitere C^*-Norm γ gilt $\gamma(x) \leq \|x\|_{max}$, $x \in A \odot B$.

Bew.: $\|\cdot\|_{max}$ submultiplikativ $\Rightarrow \|x\|_{max} < \infty$, $x \in A \odot B$.

$\|\cdot\|_{max}$ C^*-Halbnorm: ✓

Seien π_A, π_B treue Darstgen., dann ist $\pi_A \otimes \pi_B$ treu nach 1.9(i)

$\Rightarrow \|\cdot\|_{max}$ ist C^*-Norm.

$\|\cdot\|_{max}$ maximal: ✓ $\square$

1.14 Def.: $A \otimes_{max} B := \overline{A \odot B}^{\|\cdot\|_{max}}$ heißt maximales Tensorprodukt von A und B.

1.15 Bem.: (i) γ C^*-Norm auf $A \odot B \rightsquigarrow A \otimes_{max} B \twoheadrightarrow A \otimes_\gamma B := \overline{A \odot B}^{\gamma}$.

(id : $(A \odot B, \|\cdot\|_{max}) \to (A \odot B, \gamma)$ ist kontrahierender *-Hom., besitzt also Fortsetzung zu $A \otimes_{max} B \to A \otimes_\gamma B$; die Fortsetzung hat dichtes Bild, ist also surjektiv.)

(ii) A, B unital $\Rightarrow A \otimes_\gamma B$ unital und $A, B \hookrightarrow A \otimes_\gamma B$
$a \mapsto a \otimes 1_B$
$b \mapsto 1_A \otimes b$.

(iii) A, B unital $\Rightarrow A \otimes_{max} B \cong C^*(A, B \mid [A, B] = 0)$. [Übung]

(iv) $\otimes_{max}$ und $\otimes_{min}$ sind assoziativ und kommutativ. [warum?]

1.16 <u>Def.:</u> Für C^*-Algebren A, B setzen wir

$$(A \odot B)^* := \{ f : A \odot B \to \mathbb{C} \text{ lin.} \}.$$

$f \in (A \odot B)^*$ heißt positiv, falls $f(x^*x) \geq 0$, $x \in A \odot B$;

wir setzen $\|f\| := \sup\{ |f(a \otimes b)| \mid a \in A_+^1, b \in B_+^1 \}$.

Wir definieren die Zustände auf $A \odot B$ durch

$$S(A \odot B) := \{ f \in (A \odot B)^* \text{ positiv} \mid \|f\| = 1 \}.$$

1.17 <u>Prop.:</u> Jedes positive $f \in (A \odot B)^*$ hat eine positive Fortsetzung

$$\tilde{f} \in (A^\sim \odot B^\sim)^* \text{ mit } \|f\| = \|\tilde{f}\| = \tilde{f}(1_{A^\sim} \otimes 1_{B^\sim}) < \infty.$$

Bew.: Sei $(h_\lambda)_\lambda \subset A$ approx. Eins.

Für $b \in B_+$ setze $f_b(a) := f(a \otimes b)$, dann ist $f_b \in A^*$ pos., also beschränkt

$\Rightarrow \hat{f}(1_{A^\sim} \otimes b) := \lim_\lambda f(h_\lambda \otimes b) = \sup\{ f(h_\lambda \otimes b) \}$ existiert.

$\leadsto \hat{f} \in (A^\sim \odot B)^*$ mit $\hat{f}(x) = \lim_\lambda f((h_\lambda \otimes 1_{B^\sim})x) = \lim_\lambda f((h_\lambda^{\frac{1}{2}} \otimes 1_{B^\sim})x(h_\lambda^{\frac{1}{2}} \otimes 1_{B^\sim}))$, $x \in A^\sim \odot B$.

$\hat{f}$ ist linear, wohldef. und positiv.

Ebenso lässt sich $\hat{f}$ zu $\tilde{f} \in (A^\sim \odot B^\sim)^*$ fortsetzen.

Es gilt $\|f\| \leq \|\tilde{f}\|$ (trivial) und $\tilde{f}(a \otimes b) \leq \tilde{f}(1_{A^\sim} \otimes 1_{B^\sim})$, $a \in A_+^{\sim 1}$, $b \in B_+^{\sim 1}$,

so dass $\|\tilde{f}\| = \tilde{f}(1_{A^\sim} \otimes 1_{B^\sim})$.

Wähle $h \in A_+$, $g \in B_+$, $\|h\|, \|g\| \leq 1$, mit

$\tilde{f}(1_{A^\sim} \otimes 1_{B^\sim}) - \varepsilon < f(h \otimes g)$. $\Rightarrow \|\tilde{f}\| \leq \|f\|$. $\square$

1.18 **Lemma:** Seien A, B unitale C^*-Algebren und $x = x^* \in A \odot B$. Dann existieren $\lambda > 0$, $n \in \mathbb{N}$ und $z_1, \dots, z_n \in A \odot B$ mit $\lambda \cdot (1_A \otimes 1_B) - x = \sum_{i=1}^{n} z_i^* z_i$. Wir schreiben auch $\lambda \cdot (1_A \otimes 1_B) \geq_{alg} x$.

Bew.: Für $a \in A_+$, $b \in B_+$ gilt $0 \leq_{alg} a \otimes b \leq_{alg} \|a\| \cdot \|b\| \cdot (1_A \otimes 1_B)$, denn $a \otimes b = (a^{\frac{1}{2}} \otimes b^{\frac{1}{2}})^2$ und

$$a \otimes b + (\|a\| \cdot 1_A - a) \otimes b + \|a\| \cdot 1_A \otimes (\|b\| \cdot 1_B - b) = \|a\| \cdot \|b\| \cdot 1_A \otimes 1_B.$$

~~Weiter gilt $(A \odot B)_{s.a.} = A_{s.a.} \odot B_{s.a.}$ ($= \operatorname{span}\{c \otimes d \mid c \in A_{s.a.}, d \in B_{s.a.}\}$)~~

Falls $y = y^* = \sum_{k=1}^{n} a_k \otimes b_k$, so gilt

$$y = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n} (a_k + a_k^*) \otimes (b_k + b_k^*) - i(a_k - a_k^*) \otimes i(b_k - b_k^*).$$

Wir können daher $x = \sum_{k=1}^{n} c_k \otimes d_k$ mit $c_k = c_k^*$, $d_k = d_k^*$ schreiben, und es gilt

$$x \leq_{alg} \sum_{k=1}^{n} ((c_k)_+ + (c_k)_-) \otimes ((d_k)_+ + (d_k)_-) \leq_{alg} \Big(\sum_{k=1}^{n} \|c_k\| \|d_k\|\Big)(1_A \otimes 1_B).$$

□

1.19 Sei $f \in (A \odot B)^*$ positiv $\overset{GNS}{\leadsto}$ Hilbertraum $\mathcal{H}_f = \overline{A \odot B / N_f}^{\langle \cdot,\cdot \rangle_f}$
mit zyklischem Vektor $\xi_f = [1_A \otimes 1_B] \in \mathcal{H}_f$
(benutze $\tilde{f}$ falls A, B nicht unital sind)

*-Hom. $\pi_f : A \odot B \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_f)$:

Für $x, y \in A \odot B$ setze $\pi_f(x)[y] := [xy] \in \mathcal{H}_f$.

$\pi_f(x)$ setzt sich auf $\mathcal{H}_f$ fort:

Nach Lemma 1.18 ex. $\lambda > 0$ mit $x^* x \leq_{alg} \lambda \cdot (1_A \otimes 1_B)$.

Für $y \in A \odot B$ gilt

$$\| \pi_f(x)[y] \|^2 = \| [xy] \|^2 = f(y^* x^* x y)$$

$$= f(y^* \lambda \cdot (1_A \otimes 1_B) y) - \sum_{k=1}^{n} f(y^* z_k^* z_k y)$$

$$\leq \lambda \cdot f(y^* y) = \lambda \| [y] \|^2$$

$\Rightarrow$ $\pi_f(x)$ ist beschränkt auf $A \odot B / N_f$

und setzt sich eindeutig auf $\mathcal{H}_f$ fort.

$\leadsto$ π_f besitzt eine Fortsetzung $\bar{\pi}_f : A \otimes_{max} B \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_f)$;

$\bar{\pi}_f$ induziert (eind.) Fortsetzung $\bar{f}(\cdot) := \langle \xi_f, \bar{\pi}_f(\cdot) \xi_f \rangle$ von f auf $A \otimes_{max} B$.

$\Rightarrow$ $S(A \odot B) \overset{\approx}{\to} S(A \otimes_{max} B)$.

Wir erhalten dann

<u>Satz:</u> $\|x\|_{max}^2 = \sup\left\{ \frac{f(y^* x^* x y)}{f(y^* y)} \;\middle|\; f \in S(A \odot B),\ y \in A \odot B,\ f(y^* y) \neq 0 \right\}$, $x \in A \odot B$.

Bew.:

$$\text{--- --- --- } \overset{\|}{\text{--}}\ S(A \otimes_{max} B) \text{ ---}$$

$$\|$$

$$\sup \left\{ \|\pi_f(x)\|^2 \;\middle|\; f \in S(A \otimes_{max} B) \right\}$$

$$\|$$

$$\|x\|_{max}^2 .$$

□

1.20 Seien $f \in A^*$, $g \in B^*$ positiv, dann ist $f \otimes g \in (A \odot B)^*$ positiv, wo $(f \otimes g)(\sum a_i \otimes b_i) := \sum f(a_i) g(b_i)$, denn:

Seien (π_f, ξ_f), (π_g, ξ_g) GNS-Darstellungen, dann gilt

$(f \otimes g)(x) = \langle \xi_f \otimes \xi_g, (\pi_f \otimes \pi_g)(x)(\xi_f \otimes \xi_g) \rangle$, $x \in A \odot B$,

d.h. $f \otimes g$ ist Vektorzustand, also positiv.

Wir erhalten also

Satz: $$\|x\|_{min}^2 = \sup\left\{ \frac{(f\otimes g)(y^*x^*xy)}{(f\otimes g)(y^*y)} \;\middle|\; f\in S(A),\ g\in S(B),\ y\in A\odot B,\ (f\otimes g)(y^*y)\neq 0\right\}.$$

[Tatsächlich genügt es, reine Zustände zu betrachten.]

Bew.: $$\|x\|_{min}^2 = \sup\left\{ \|(\pi_A\otimes\pi_B)(x^*x)\| \;\middle|\; \pi_A, \pi_B \text{ Darstellungen} \right\}$$

$$= \sup\left\{ \text{———} \;\middle|\; (\pi_A,\xi_A), (\pi_B,\xi_B) \text{ zykl. Darstellungen} \right\}$$

[denn $\Rightarrow$ jede Darstellung ist Summe von zykl. Darst.]

$$= \sup\left\{ \frac{\langle(\pi_A\otimes\pi_B)(y)(\xi_A\otimes\xi_B), (\pi_A\otimes\pi_B)(x^*x)(\pi_A\otimes\pi_B)(y)(\xi_A\otimes\xi_B)\rangle}{\|(\pi_A\otimes\pi_B)(y)(\xi_A\otimes\xi_B)\|^2} \;\middle|\; (\pi_A,\xi_A), (\pi_B,\xi_B) \text{ zykl. Darstellungen}, y\in A\odot B, \text{Nenner}\neq 0 \right\}$$

$$= \sup\left\{ \frac{(f_{\xi_A}\otimes f_{\xi_B})(y^*x^*xy)}{(f_{\xi_A}\otimes f_{\xi_B})(y^*y)} \;\middle|\; \text{———} \right\}$$

$$\leq \sup\left\{ \frac{(f\otimes g)(y^*x^*xy)}{(f\otimes g)(y^*y)} \;\middle|\; f\in S(A), g\in S(B), y\in A\odot B, \text{Nenner}\neq 0 \right\}$$

$$\overset{\text{GNS}}{\leq} \|x\|_{min}^2 . \qquad \square$$

[$(f\otimes g)(y^*x^*xy) = \langle \xi_f\otimes\xi_g, (\pi_f\otimes\pi_g)(y^*x^*xy)(\xi_f\otimes\xi_g)\rangle \leq \langle \xi_f\otimes\xi_g, (\pi_f\otimes\pi_g)(y^*y)(\xi_f\otimes\xi_g)\rangle \cdot \|(\pi_f\otimes\pi_g)(x^*x)\|$
$\leq (f\otimes g)(y^*y)\cdot\|x\|_{min}^2 .$]

1.21 Satz: Sei $A = C_0(X)$ und B C^*-Algebren.

Dann existiert nur eine C^*-Norm auf $A \odot B$ und $A \otimes B \cong C_0(X, B)$ mit $a\otimes b\,(x) = a(x)\cdot b$, $x\in X$, $a \in A$, $b\in B$.

Falls $B = C_0(Y)$, so haben wir $A\otimes B \cong C_0(X\times Y)$ mit $a\otimes b\,(x,y) = a(x)\,b(y)$.

Bew.: (i) Wir dürfen A, B unital annehmen:

$\|\cdot\|_{\min, A^\sim \odot B^\sim}\big|_{A\odot B} = \|\cdot\|_{\min, A\odot B}$, denn $\pi_{A^\sim}\otimes\pi_{B^\sim}\big|_{A\odot B} = \pi_A \otimes \pi_B$.

Ebenso für $\|\cdot\|_{\max}$ bzw. γ, denn $\pi: A\odot B \to B(H)$ setzt sich fort zu $\tilde\pi: A^\sim \odot B^\sim \to B(H)$ nach Satz 1.11 / Kor 1.12.

(ii) Es gilt $PS(A\otimes_{\max} B) \approx PS(A)\times PS(B)$:

Sei $f\in PS(A\otimes_{\max} B)$, π_f die irreduzible GNS-Darstlg. und π_A, π_B Darstlgn. von A, B nach Satz 1.11.

π_f ist Faktordarstlg. $\overset{1.11}{\Rightarrow}$ π_A ist Faktordarstlg., d.h. $\pi_A(A)'' \cap \pi_A(A)' = \mathbb{C}1$

A kommutativ $\Rightarrow \pi_A(A) \subset \mathbb{C}\cdot 1_{H_f} \Rightarrow \pi_A \in \hat A \Rightarrow \pi_A(\cdot) = ev_x(\cdot)\, 1_{H_f}$ für ein $x\in X$.

Dann gilt $f(a\otimes b) = \langle \xi_f, ev_x(a)\cdot\pi_f(1_A\otimes b)\xi_f\rangle = ev_x(a)\cdot g(b)$,
wo $g(\cdot) := \langle \xi_f, \pi_B(\cdot)\xi_f\rangle$.

π_B ist irreduzibel und g ist Vektorzustand $\Rightarrow g\in PS(B)$

$\Rightarrow f = ev_x\otimes g$. [$ev_x\otimes g \in PS(A\otimes_{\max} B)$ für $g\in PS(B)$ ist klar.]

$\Rightarrow PS(A\otimes_{\max}B) \approx X\times PS(B) = PS(A)\times PS(B)$.

(iii) $\|\cdot\|_{max} = \|\cdot\|_{min}$:

$$\|z\|^2_{max} = \sup\{ f(z^*z) \mid f \in PS(A \otimes_{max} B)\}$$
$$= \sup\{ (ev_x \otimes g)(z^*z) \mid x \in X,\ g \in PS(B)\}$$
$$\overset{1.20}{\leq} \|z\|^2_{min}$$
$$\leq \|z\|^2_{max}, \quad z \in A \odot B.$$

(iv) Es gilt $Prim(A \otimes_{max} B) \cong X \times Prim\, B$:

Betrachte das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
ev_x \otimes g \arrow[d, mapsto] & PS(A \otimes_{max} B) \arrow[d] & X \times PS(B) \arrow[l, "\cong"'] \arrow[d] & (x, g) \arrow[d, mapsto] \arrow[lll, mapsto, bend right] \\
\ker(ev_x \otimes g) & Prim(A \otimes_{max} B) & X \times Prim\, B \arrow[l, dashed, "\Theta"'] & (x, \ker \pi_g)
\end{tikzcd}$$

$\ker(ev_x \otimes g) = \ker(\pi_{ev_x \otimes g})$ $\quad \ker(ev_x \otimes \pi_g) \longleftarrow (x, \ker \pi_g)$

Θ ist wohldefiniert (dann ist Θ automatisch Homöom.):

$$\begin{tikzcd}
a \otimes b \arrow[d, mapsto] & A \otimes_{max} B \arrow[d, "\delta_x"'] \arrow[ddr] & \\
f(a) \cdot b & B \arrow[d, "\pi_g"'] & \\
& B(\mathcal{H}_g) \arrow[r, phantom, "\cong"] & B(\mathbb{C} \otimes \mathcal{H}_g)
\end{tikzcd}$$

$ev_x \otimes \pi_g = \pi_{ev_x \otimes g}$

$\Rightarrow \ker \pi_{ev_x \otimes g} = \delta_x^{-1}(\ker \pi_g)$ hängt nur von $\ker \pi_g$ ab, nicht von g

$\Rightarrow \Theta$ ist wohldef.

(v) $\|\cdot\|_{max} = \|\cdot\|_{min}$ ist die einzige C^*-Norm auf $A\odot B$:

Sei γ eine weitere C^*-Norm und $q : A\otimes_{max} B \to A\otimes_\gamma B$ die Quotientenabbildung. Damit ist

$$Y := \{ y \in \mathrm{Prim}\,(A\otimes_{max} B) \mid \ker q \subset y \} \subseteq_{abg.} \mathrm{Prim}\,(A\otimes_{max} B)$$

[Erinnerung: $\{\text{abg. Ideale von } C\} \xrightarrow{\cong} \{\text{abg. Teilmengen von } \mathrm{Prim}\, C\}$

$$J \mapsto \{ y \in \mathrm{Prim}\, C \mid J \subset y \}$$

$\bigcap \mathcal{U} \leftarrow \mathcal{U}$, $\{0\} \leftrightarrow \mathrm{Prim}\, C$]

Angenommen $\{0\} \neq \ker q$.

$\Rightarrow Y \neq \mathrm{Prim}\,(A\otimes_{max} B) \approx X \times \mathrm{Prim}\, B$

$\Rightarrow \exists\, \emptyset \neq U \subseteq_{offen} \mathrm{Prim}\, A = X,\ \emptyset \neq V \subseteq_{offen} \mathrm{Prim}\, B$ mit $Y \cap U\times V = \emptyset$.

$\Rightarrow X\setminus U \subsetneq_{abg.} X$, $\mathrm{Prim}\, B \setminus V \subsetneq_{abg.} \mathrm{Prim}\, B$

und $\bigcap_{x\in X\setminus U} \ker ev_x =: I \neq \{0\}$,

$\bigcap_{z \in \mathrm{Prim}\, B\setminus V} z =: J \neq \{0\}$.

$[y = (y_A, y_B)]$

$$\Rightarrow \ker q = \bigcap_{y\in Y} y \supset \bigcap_{y \notin U\times V} y = \Big(\bigcap_{y_A \notin U} y\Big) \cap \Big(\bigcap_{y_B\notin V} y\Big) \supset I\otimes B \cap A\otimes J \supset I\odot J \neq \{0\}.$$

$\Rightarrow \gamma(I\odot J) = 0$ ↯ denn γ ist Norm auf $A\odot B$. □

1.22 <u>Satz</u>: Seien A, B C^*-Algebren, und sei γ eine C^*-Norm auf $A \odot B$.
Dann gilt $\|x\|_{min} \leq \gamma(x)$, $x \in A \odot B$.

Bew.: (i) Wir dürfen A, B unital annehmen:
Nach Cor. 1.12 setzt sich γ auf $\tilde{A} \odot \tilde{B}$ fort;
weiter gilt $\|\cdot\|_{min, \tilde{A}\odot\tilde{B}}\big|_{A \odot B} = \|\cdot\|_{min, A\odot B}$. [Übg]

(ii) $f \in P(A)$, $g \in P(B) \Rightarrow f \otimes g$ ist stetig bzgl. γ und setzt sich fort zu einem Zustand auf $A \otimes_\gamma B$:

Setze $S_\gamma := \{(f,g) \in P(A) \times P(B) \mid f \otimes g$ hat Fortsetzung zu Zustand auf $A \otimes_\gamma B\}$,
dann ist $S_\gamma \overset{\subseteq}{\text{abg}} P(A) \times P(B)$ (w^*-Top. $\times$ w^*-Top.) [Übg].
Für $b \in B_+$ setze $C := C^*(b) \cong C_0(\sigma(b) \setminus \{0\})$.
Wähle $\omega \in P(C)$ mit $\omega(b) = \|b\|$.
Falls nun $f' \in P(A)$, so ist $f' \otimes \omega \overset{\text{Bem. 1.21}}{\in} P(A \otimes_{min} C) \overset{1.21}{=} P(A \otimes_\gamma C)$;
mit Krein-Milman erhält man Fortsetzung zu $\Theta \in P(A \otimes_\gamma B)$.
(OA I, Cor. 7.14)
Es gilt $\Theta = f' \otimes g'$, ~~wobei~~ wo $g' := \Theta|_{1_A \otimes_\gamma B} \in P(B)$:

$y \in B_+^1 \rightsquigarrow f_1(x) := \Theta(x \otimes y)$, $f_1 \in A^*$

$f_2(x) := \Theta(x \otimes (1_B - y))$, $f_2 \in A^*$

$\Rightarrow f' = f_1 + f_2$; f' rein $\Rightarrow f_1 = \lambda f'$, $\lambda = f_1(1_A) = g'(y)$

$\Rightarrow \Theta(x \otimes y) = f_1(x) = f'(x) \cdot g'(y) = f' \otimes g'(x \otimes y)$.

g' rein ✓ [warum?]

Weiter gilt $\|b\| = \omega(b) = f' \otimes \omega(1_A \otimes b) = \Theta(1_A \otimes b) = f' \otimes g'(1_A \otimes b) = g'(b)$.

$\Rightarrow \; Y := \{ g' \in P(B) \mid (f', g') \in S_\gamma \}$ normierend B

$\overset{[\text{Übung}]}{\Rightarrow} \; Y \underset{\text{dicht}}{\subset} P(B)$.

Also $\{f'\} \times Y \subset S_\gamma \underset{\text{abg}}{\subset} P(A) \times P(B)$

$$\Rightarrow \{f'\} \times P(B) = \{f'\} \times \overline{Y}^{P(B)} = \overline{\{f'\} \times Y}^{P(A) \times P(B)} \subset S_\gamma$$

$\overset{f' \in P(A) \text{ beliebig}}{\Rightarrow} \quad P(A) \times P(B) = S_\gamma$.

(iii) Jedes $f \otimes g$, $f \in S(A)$, $g \in S(B)$, setzt sich zu einem Zustand auf $A \otimes_\gamma B$ fort. [Warum?]

(iv) Für $x \in A \odot B$ gilt

$$\|x\|_{min}^2 \overset{1.20}{=} \sup \left\{ \frac{f \otimes g\,(y^* x^* x y)}{f \otimes g\,(y^* y)} \;\middle|\; f \in S(A),\ g \in S(B),\ y \in A \odot B,\ \text{Nenner} \neq 0 \right\}$$

$$\overset{(iii)}{\leq} \sup \left\{ \gamma(x^* x) \cdot \frac{f \otimes g\,(y^* y)}{f \otimes g\,(y^* y)} \;\middle|\; \ldots \right\}$$

$$= \gamma(x^* x) = \gamma(x)^2.$$

□

1.23 Bem.: (i) Für jede C^*-Norm γ auf $A \odot B$ gilt

$$\|\,.\,\|_{min} \leq \gamma(.) \leq \|\,.\,\|_{max}$$

und

$$\gamma(a \otimes b) = \|a\|\,\|b\|, \quad a \in A,\ b \in B,$$

denn

$$\begin{aligned}
\|a\|^2 \cdot \|b\|^2 &\geq \gamma(a \otimes b)^2 \\
&\geq \|a \otimes b\|_{min}^2 \\
&\overset{1.20}{\geq} \sup \left\{ f \otimes g\,(a^*a \otimes b^*b) \mid f \in P(A),\ g \in P(B) \right\} \\
&= \sup \left\{ f(a^*a)\, g(b^*b) \mid \text{—} \right\} \\
&= \|a^*a\|\,\|b^*b\| \\
&= \|a\|^2\,\|b\|^2 .
\end{aligned}$$

(ii) Wir haben kanonische $*$-Homomorphismen

$$A \otimes_{max} B \twoheadrightarrow A \otimes_\gamma B \twoheadrightarrow A \otimes_{min} B .$$

1.24 Cor.: A, B einfach $\Rightarrow$ $A \otimes_{min} B$ einfach.

Bew.: z.z.: jede irr. Darst. $\pi : A \otimes_{min} B \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist isometrisch.

[Denn: $J \triangleleft A \otimes_{min} B$, $A \otimes_{min} B \twoheadrightarrow A \otimes_{min} B / J \xrightarrow[\text{irr}]{} \mathcal{B}(\mathcal{H})$, wobei die Zusammensetzung π ist $\Rightarrow \pi$ irr
$\Rightarrow \pi$ isom. $\Rightarrow J = 0$.]

genügt z.z.: Für $\pi : A \otimes_{min} B \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ irr ist $\pi|_{A \odot B}$ treu.

Denn: dann ist $\gamma(.) := \|\pi(.)\|$ C^*-Norm auf $A \odot B$

$\Rightarrow \|\,.\,\|_{min} \overset{1.22}{\leq} \gamma(.) \overset{\pi \text{ kontraktiv}}{\leq} \|\,.\,\|_{min} \Rightarrow \pi$ isometrisch.

Sei also π irr. gegeben und seien π_A, π_B wie in 1.11.

Sei $c = \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i \in A \odot B$ mit $\pi(c) = \sum_{i=1}^n \pi_A(a_i)\pi_B(b_i) = 0$.

z.z.: $c = 0$.

Setze $\tilde{\mathcal{H}} := \mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^n$ und

$$X := \{ \sum_{i=1}^n \pi_B(b b_i)\xi \otimes e_i \mid \xi \in \mathcal{H}, b \in B \} \subseteq_{\text{alg}} \tilde{\mathcal{H}}$$

$$Y := \{ \sum_{i=1}^n \pi_A(a_i^*)\eta \otimes e_i \mid \eta \in \mathcal{H} \} \subseteq_{\text{alg}} \tilde{\mathcal{H}}.$$

$\pi(c) = 0 \Rightarrow X \perp Y.$

Sei $B(\tilde{\mathcal{H}}) \ni p : \tilde{\mathcal{H}} \to X$ die orth. Projektion;

mit $B(\tilde{\mathcal{H}}) \cong M_n(B(\mathcal{H}))$ können wir $p = (p_{ij})$, $p_{ij} \in B(\mathcal{H})$ schreiben.

Es gilt $(\pi_B(B) \otimes 1_{\mathbb{C}^n})X \subset X$ und $(\pi_A(A) \otimes 1_{\mathbb{C}^n})X \subset X$ $([\pi_A(A), \pi_B(B)] = 0)$

$\Rightarrow p \in (\pi_B(B) \otimes 1_{\mathbb{C}^n})' \cap (\pi_A(A) \otimes 1_{\mathbb{C}^n})' \subset (\pi(A \otimes_{\min} B) \otimes 1_{\mathbb{C}^n})'$

[warum?]

$\Rightarrow p_{ij} \in \pi(A \otimes_{\min} B)' \overset{\pi \text{ irr}}{\Rightarrow} p_{ij} \in \mathbb{C} \cdot 1_{\mathcal{H}} \Rightarrow p \in 1_{\mathcal{H}} \otimes M_n.$

Für $b \in B$, $\xi \in \mathcal{H}$ haben wir

$$X \ni \sum_{j=1}^n \pi_B(b b_j)\xi \otimes e_j = p\Big(\sum_{j=1}^n \pi_B(b b_j)\xi \otimes e_j\Big) = \sum_{i,j=1}^n p_{ij}\, \pi_B(b b_j)\xi \otimes e_i$$

$\Rightarrow \pi_B(b b_i)\xi = \sum_{j=1}^n p_{ij}\, \pi_B(b b_j)\xi, \quad b \in B, \xi \in \mathcal{H}, i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow \pi_B(b_i) = \sum_{j=1}^n p_{ij}\, \pi_B(b_j), \quad i = 1, \dots, n.$

Weiter gilt

$$0 = p \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \pi_A(a_j^*)\eta \otimes e_j}_{\in Y} = \sum_{i,j=1}^{n} p_{ij} \pi_A(a_j^*)\eta \otimes e_i, \quad \eta \in \mathcal{H}$$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\, \pi_A(a_j^*), \quad i = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{j=1}^{n} \overline{p_{ij}}\, \pi_A(a_j), \quad i = 1, \dots, n$$

$$\left[\overset{p = p^*}{=} \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\, \pi_A(a_i), \quad j = 1, \dots, n \right]$$

Wir erhalten

$$B(\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}) \supset B(\mathcal{H}) \odot B(\mathcal{H}) \ni \pi_A \otimes \pi_B\,(c) = \sum_{i=1}^{n} \pi_A(a_i) \otimes \pi_B(b_i)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \pi_A(a_i) \otimes p_{ij}\, \pi_B(b_j)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} p_{ij}\, \pi_A(a_i) \otimes \pi_B(b_j)$$

$$= 0.$$

π_A, π_B treu $\Rightarrow$ $\pi_A \otimes \pi_B \big|_{A \odot B}$ treu $\Rightarrow c = 0$. $\square$

1.25 Prop.: A_1, A_2, B_1, B_2 C^*-Algebren, $\varphi: A_1 \to A_2$, $\psi: B_1 \to B_2$ *-Hom.,

dann existieren kanonische *-Hom.

$$\varphi \otimes \psi : A_1 \odot B_1 \to A_2 \odot B_2,$$

$$\varphi \otimes_{max} \psi : A_1 \otimes_{max} B_1 \to A_2 \otimes_{max} B_2$$

$$\varphi \otimes_{min} \psi : A_1 \otimes_{min} B_1 \to A_2 \otimes_{min} B_2.$$

Falls φ, ψ injektiv sind, so auch $\varphi \otimes_{min} \psi$ (i.a. jedoch nicht $\varphi \otimes_{max} \psi$).

Bew.: Übung. $\square$