Musterlösung Aufgabe 2, Blatt 5

ww

a) Sei $x = \frac{p}{q}$ für $p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}^*$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existieren dann $m \geq m' \in \mathbb{N}$ mit $nx = \frac{m}{q}$ und $[nx] = \frac{m'}{q}$. Es gilt daher $nx - [nx] = \frac{m-m'}{q}$ mit $m - m' \in \mathbb{N}$. Da außerdem $nx - [nx] \in [0, 1)$, gilt $m - m' \in \{0, 1, \ldots, q - 1\}$. Es folgt insbesondere, dass $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \{0, \frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \ldots, \frac{q-1}{q}\}$.

Falls nun $b \notin \{0, \frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \ldots, \frac{q-1}{q}\}$, so gilt für $\epsilon := \min\{|b - \frac{l}{q}| \mid l = 0, \ldots, q-1\} > 0$, dass $|a_n - b| \geq \epsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h., keine Teilfolge kann gegen b konvergieren.

b) Sei nun $0 < x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

<u>Schritt 1</u>: Wir zeigen zunächst:

$$\forall\, a \in (0, 1), \eta > 0, L \in \mathbb{N}\; \exists\, L < S \in \mathbb{N} : |a_S - a| < \eta. \tag{1}$$

Seien also $0 < a < 1$, $\eta > 0$ und $L \in \mathbb{N}$ gegeben. Wähle $0 < \delta \leq \frac{a}{L+2}, \frac{1-a}{L+1}$. Da $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, 1]$ beschränkt ist, existiert nach Bolzano–Weierstraß ein Häufungspunkt. Dann existieren aber $M \neq N \in \mathbb{N}$ mit

$$0 < a_N - a_M = (Nx - [Nx]) - (Mx - [Mx]) < \delta$$

(beachte, dass $a_N = a_M$ implizieren würde, dass x rational ist).

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

(i) Falls $N - M > 0$, so wähle $T \in \mathbb{N}$ mit

$$0 < a - \delta < T \cdot (a_N - a_M) \leq a < 1;$$

beachte, dass $T + 1 \geq \frac{a}{\delta} \geq L + 2$. Es gilt dann also

$$0 < T \cdot (a_N - a_M) = (TN - TM) \cdot x - T \cdot ([Nx] - [Mx]) < 1;$$

da $[(TN - TM) \cdot x] \in \mathbb{N}$ eindeutig bestimmt ist, folgt

$$\mathbb{N} \ni T \cdot ([Nx] - [Mx]) = [(TN - TM) \cdot x].$$

Setze nun $S := TN - TM \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$a_S = Sx - [Sx] = T \cdot (a_N - a_M),$$

also

$$a - \delta < a_S \leq a.$$

Außerdem gilt $S \geq T > L$.

(ii) Falls $N - M < 0$, wähle $T \in \mathbb{N}$ mit

$$0 < 1 - a \leq T(a_N - a_M) < 1 - a + \delta;$$

beachte, dass $T \geq \frac{1-a}{\delta} \geq L + 1$. Es gilt dann

$$a - \delta < -T(a_N - a_M) + 1 \leq a$$

und

$$0 < -T(a_N - a_M) + 1 = -T(N - M)x - (-T[Nx] + T[Mx] - 1) < 1.$$

Dann folgt aber (wie in (i))

$$-T[Nx] + T[Mx] - 1 = [-T(N - M)x];$$

mit $S := -T(N - M) \in \mathbb{N}$ gilt nun

$$a - \delta < a_S = Sx - [Sx] < a$$

sowie $S \geq T > L$.

Schritt 2: Falls $a \in (0, 1)$, erhält man eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ durch Induktion wie folgt:

Setze $n_0 := 0$, dann gilt $|a_{n_0} - a| = |0 - a| \leq 1$.

Falls $n_k > n_{k-1} > \ldots > n_0$ mit $|a_{n_k} - a| \leq \frac{1}{k+1}$ bereits konstruiert sind, wende (1) an mit $\frac{1}{k+2}$ anstelle von ϵ und n_k anstelle von L, um $S > n_k$ zu finden mit $|a_S - a| < \frac{1}{k+2}$. Setze $n_{k+1} := S$.

Induktion liefert nun die gewünschte Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $a_{n_k} \xrightarrow{k \to \infty} a$.

Falls $a = 0$ (bzw. $a = 1$), so ersetzt man in der induktiven Konstruktion im k-ten Schritt a durch $\frac{1}{k+1}$ (bzw. durch $1 - \frac{1}{k+1}$).

Bemerkung: Wir werden später sehen, dass sich die Aufgabe geometrisch interpretieren lässt: Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschreibt die Rotation eines Punktes auf dem Einheitskreis um die Winkel $2\pi x n$, $n \in \mathbb{N}$. Teil b) sagt dann, dass der Punkt auf seinem Weg jedem anderen Punkt auf dem Kreis beliebig nahe kommt, wenn x irrational ist.