

Dieses Blatt ist nicht mehr abzugeben, wird also auch nicht korrigiert und geht nicht mehr in die Klausurzulassung ein. Dennoch sind die Inhalte dieses Übungsblattes relevant für die Klausur. Es werden daher am Montag, 22. Januar 2018, Musterlösungen zu den Aufgaben veröffentlicht.

Aufgabe 1

- (a) Bestimmen Sie $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{x^3}$.
(b) Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass f auf \mathbb{R} unendlich oft differenzierbar ist.

Aufgabe 2

- (a) Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton. Zeigen Sie, dass f eine Regelfunktion ist.
(b) Es sei $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in ([0, 1] \setminus \mathbb{Q}) \cup \{0\} \\ \frac{1}{q}, & x \in (0, 1] \cap \mathbb{Q}, x = \frac{p}{q} \text{ als vollständig gekürzter Bruch mit } q > 0 \end{cases}$$

Ist f eine Regelfunktion?

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

$$(a) \int_0^1 x^n (1-x)^m dx, \quad (b) \int_{-1}^1 (1+x)^n (1-x)^m dx.$$

HINWEIS: Durch eine geeignete Substitution können Sie das zweite Integral auf das erste zurückführen.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie das Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}$$

für beliebige Parameter $a, b \in (0, \infty)$.

HINWEIS: Benutzen Sie z.B. die Substitutionsregel um zunächst das Integral über dem Intervall $[0, \frac{\pi}{2} - \varepsilon]$ zu berechnen und betrachten dann den Limes für $\varepsilon \rightarrow 0$.

Aufgabe 5

Es sei $f: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}_+$ (für $a > 0$), eine streng monoton fallende, stetige Funktion. Zeigen Sie, dass $\int_0^a f(x) \sin(x) dx > 0$ gilt.

Beispiele für Klausuraufgaben:

Aufgabe

Die folgenden Mengen sind nicht abzählbar: (Kreuzen Sie die richtigen Aussagen an.)

- (a) die Menge aller Abbildungen $f : \{0, 1, 2\} \rightarrow \mathbb{N}$
- (b) die Menge aller Abbildungen $f : \{0, 1, 2, \dots\} \rightarrow \mathbb{N}$
- (c) die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, welche nur ganzzahlige Werte annehmen

Aufgabe

Bestimmen Sie Stammfunktionen der folgenden Funktionen:

- (a) $x\sqrt{1+x}$
- (b) $\tan(x)$
- (c) $\sqrt{\sin(x)} \cos^3(x)$