Aufgabe 1

(a) Bestimmen Sie $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{x^3}$.
(b) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar ist.

Lösung:

(a) Die Funktionen $x - \sin x$ und x^3 sind in einem offenen Intervall um $x = 0$ differenzierbar und es gilt $\lim_{x\to 0} x - \sin x = \lim_{x\to 0} x^3 = 0$. Damit sind die Voraussetzungen für die Anwendungen des Satzes von de l'Hospital gegeben. Es gilt damit

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2},$$

falls der zweite Grenzwert existiert.
Analog sind $1 - \cos x$ und $3x^2$ in einem offenen Intervall um $x = 0$ differenzierbar und $\lim_{x\to 0} 1 - \cos x = \lim_{x\to 0} 3x^2 = 0$. Unter denselben Bedingungen wie oben gilt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x}.$$

Wie oben sind $\sin x$ und $6x$ bei 0 differenzierbar und $\lim_{x\to 0} \sin x = \lim_{x\to 0} 6x = 0$. Es gilt also

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}.$$

Wir haben also den Satz von de l'Hospital dreimal angewendet.

(b) Wir betrachten zuerst die Ableitungen auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Für $x \neq 0$ gilt

$$f'(x) = 2\tfrac{1}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad \text{und} \quad f''(x) = -6\tfrac{1}{x^4} e^{-\frac{1}{x^2}} + 4\tfrac{1}{x^6} e^{-\frac{1}{x^2}} = \big(-6\tfrac{1}{x^4} + 4\tfrac{1}{x^6}\big) e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Für die Polynome $p_1(t) = 2t^3$ und $p_2(t) := -6t^4 + 4t^6$ gilt also $f'(x) = p_1(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}$ und $f'(x) = p_2(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}$ für $x \neq 0$.
Wir zeigen induktiv: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert ein Polynom p_n mit

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} p_n(1/x)e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

IA: Klar mit $p_0(x) = 1$.
IS: Sei die Behauptung für n bewiesen. Für $x \neq 0$ gilt dann

$$f^{(n+1)}(x) = p_n'(1/x)(-1/x^2)e^{-1/x^2} + p_n(1/x)(2/x^3)e^{-1/x^2} = p_{n+1}(1/x)e^{-1/x^2},$$

wo $p_{n+1}(y) := p_n'(y)(-y^2) + p_n(y)2y^3$ wieder ein Polynom ist.
Weiter gilt für $k \in \mathbb{N}$ nach l'Hospital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{x^2/k}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{(2x/k)e^{x^2/k}} = 0,$$

also auch

$$\lim_{x\to 0, x>0} \frac{e^{-1/x^2}}{x^k} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x^2}}{1/x^k} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{e^{x^2/k}}\right)^k = 0$$

und

$$\lim_{x\to 0, x<0} \frac{e^{-1/x^2}}{x^k} = \lim_{x\to -\infty} \frac{e^{-x^2}}{1/x^k} = \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{x}{e^{x^2/k}}\right)^k = 0.$$

Wir erhalten

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x\to 0, x\neq 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0, x\neq 0} p_n(x) e^{-1/x^2} = 0.$$

Es folgt, dass f auf $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar ist.

Aufgabe 2

(a) Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton. Zeigen Sie, dass f eine Regelfunktion ist.
(b) Es sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in ([0,1] \setminus \mathbb{Q}) \cup \{0\} \\ \frac{1}{q}, & x \in (0,1] \cap \mathbb{Q}, x = \frac{p}{q} \text{ als vollständig gekürzter Bruch mit } q > 0 \end{cases}$$

Ist f eine Regelfunktion?

Lösung:

(a) O.E.d.A. sei f eine monoton wachsende Funktion (sonst ersetze f durch $-f$).
Wir zeigen zuerst, dass $\lim_{x\searrow a_0, x\neq a_0} f(x)$ für jedes $a_0 \in [a,b)$ existiert:
Es sei $(x_n)_{\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge mit $x_n \in (a_0, b]$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Dann ist $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge (da f steigend ist), die durch $f(a_0)$ nach unten beschränkt ist. Also ist $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit $f(a_0) \leq \lim_n f(x_n)$.
Sei nun $(y_n)_{\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge, die gegen a_0 konvergiert und Werte in $(a_0, b]$ annimmt. Wir müssen zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_n)$ gilt.
Für jedes $N \in \mathbb{N}$ gibt es $N < N_1 \in \mathbb{N}$, so dass $x_N > y_n$ für jedes $n \geq N_1$. Es folgt $f(x_N) \geq f(y_n)$ für $n \geq N_1$ und damit $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_n)$. Der Grenzwert $\lim_{x\searrow a_0, x\neq a_0} f(x)$ existiert also.
Die Existenz von $\lim_{x\nearrow b_0, x\neq b_0} f(x)$ für $b_0 \in (a,b]$ zeigt man analog. Wir zeigen nun, dass daraus folgt, dass f eine Regelfunktion ist. (Siehe auch Bemerkung 13.9 der Vorlesung.)
Um die Notation zu vereinfachen, setzen wir

$$f(t-) := \lim_{x\nearrow t, x\neq t} f(x), \quad \text{und} \quad f(t+) := \lim_{x\searrow t, x\neq t} f(x).$$

Da f monoton wachsend ist, gilt $f(t-) \leq f(t+)$ für alle $t \in (a,b)$. Falls $f(t-) \neq f(t+)$, dann nennen wir t eine Sprungstelle von f, und $f(t+) - f(t-)$ ist die Sprunghöhe von f bei t.
Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es nur endlich viele Sprungstellen in mit Sprunghöhe $\geq \varepsilon$. (Warum?) Seien $t_1 < t_1 < \ldots < t_{n-1}$ diese Sprungstellen. Wir setzen $t_0 := a$ und $t_n := b$. Für jedes $k = 0, \ldots, n-1$ betrachten wir nun das Interval $[t_k, t_{k+1}]$, auf dem es keine Sprungstellen mit Höhe $\geq \varepsilon$ gibt. Wir können nun $t_k < t_{k,1} < t_{k,2} < \ldots < t_{k,l(k)-1} < t_{k+1}$ so wählen, dass mit $t_{k,0} := t_k$ und $t_{k,l(k)} := t_{k+1}$ für jedes $r = 0, \ldots, l(k)-1$ gilt: $f(t_{k,r}-) \leq f(t_{k,r+1}+) \leq f(t_{k,r}-) + \varepsilon$. (Warum?) Wir wählen nun eine Treppenfunktion $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $g(b) := f(b)$, und so dass für alle $k = 0, \ldots, n-1$ und $r = 0, \ldots, l(k)-1$ gilt: $g(t_{k,r}) := f(t_{k,r})$ und g ist auf $(t_{k,r}, t_{k,r+1})$ konstant mit Wert $f(\frac{t_{k,r}+t_{k,r+1}}{2})$. Dann gilt $\|f-g\|_\infty \leq \epsilon$.

(b) Sei $\epsilon > 0$. Wähle $q_0 \in \mathbb{N}^*$ mit $1/q < \epsilon$. Die Menge

$$M := \big\{(p,q) : p \in \mathbb{Z}, q \in \{1,\dots,q_0-1\}; p,q \text{ teilerfremd }; p/q \in [0,1]\big\}$$

ist endlich (warum?). Dann ist auch

$$N := \{p/q \mid (p,q) \in M\}$$

endlich und

$$g(x) := \begin{cases} 0, & x \in [0,1] \setminus N \\ 1/q, & x = p/q \in N \end{cases}$$

ist eine Treppenfunktion. Für $x \in [a,b] \setminus \mathbb{Q}$ und für $x \in N$ gilt $f(x) = g(x)$. Für $x = p/q \in ([0,1] \cap \mathbb{Q}) \setminus N$ gilt $p/q \notin M$, also $q \geq q_0$ und $|f(x) - g(x)| = |f(x) - 0| = 1/q < \epsilon$. Insgesamt erhalten wir also $\|f - g\|_\infty \leq \epsilon$.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

$$\text{(a)} \int_0^1 x^n(1-x)^m dx, \qquad \text{(b)} \int_{-1}^1 (1+x)^n(1-x)^m dx.$$

Lösung:

(a) Wir berechnen das Integral mittels partieller Integration. Dazu setzen wir $u' = x^n, v = (1-x)^m$. Dann gilt $u = \frac{x^{n+1}}{n+1}, v' = -m(1-x)^{m-1}$. Es folgt:

$$\begin{aligned} I_{n,m} &:= \int_0^1 x^n(1-x)^m dx \\ &= \frac{x^{n+1}(1-x)^m}{n+1}\bigg|_0^1 + \int_0^1 \frac{m}{n+1} x^{n+1}(1-x)^{m-1} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot m(1-x)^{m-1} dx = \frac{m}{n+1} I_{n+1,m-1}. \end{aligned}$$

Mit $I_{n+m,0} = \int_0^1 x^{n+m} dx = \frac{1}{n+m+1}$ und der obigen Rekursionsformel folgt

$$I_{n,m} = \frac{m}{n+1} I_{n+1,m-1} = \frac{m}{n+1}\frac{m-1}{n+2} I_{n+2,m-2} = \ldots = \frac{n!m!}{(n+m+1)!}.$$

(b) Wir verwenden Teil (a) und wenden die Substitution $g(x) = \frac{x+1}{2}$ an; es gilt $g'(x) = \frac{1}{2}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1+x)^n(1-x)^m dx &= 2\int_{-1}^1 (2g(x))^n(2-2g(x))^m g'(x) dx \\ &= 2^{n+m+1} \int_{-1}^1 (g(x))^n(1-g(x))^m g'(x) dx \\ &= 2^{n+m+1} \int_{g(-1)}^{g(1)} x^n(1-x)^m dx \\ &= 2^{n+m+1} \int_0^1 x^n(1-x)^m dx \\ &= 2^{n+m+1} I_{n,m} = 2^{n+m+1} \frac{n!m!}{(n+m+1)!}. \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Bestimmen Sie das Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}$$

für beliebige Parameter $a, b \in (0, \infty)$.

Lösung:

Es gilt

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-\epsilon} \frac{d\varphi}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\epsilon} \frac{\frac{1}{\cos^2 \varphi}}{a^2 \tan^2 \varphi + b^2} d\varphi.$$

Substituiere $g(\varphi) = \tan \varphi$ und erhalte $g'(\varphi) = \frac{1}{\cos^2 \varphi}$, also

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}-\epsilon} \frac{\frac{1}{\cos^2 \varphi}}{a^2 \tan^2 \varphi + b^2} d\varphi &= \int_0^{\tan(\frac{\pi}{2}-\epsilon)} \frac{d\varphi}{a^2 \varphi^2 + b^2} \\
&= \frac{1}{b^2} \int_0^{\tan(\frac{\pi}{2}-\epsilon)} \frac{d\varphi}{\left(\frac{a}{b}\varphi\right)^2 + 1} \\
&\overset{(*)}{=} \frac{1}{ab} \int_0^{\frac{a}{b}\tan(\frac{\pi}{2}-\epsilon)} \frac{ds}{s^2+1} \\
&\overset{A12.2}{=} \frac{\arctan x}{ab} \Big|_0^{\frac{a}{b}\tan(\frac{\pi}{2}-\epsilon)} \\
&= \frac{\arctan(\frac{a}{b}\tan(\frac{\pi}{2}-\epsilon))}{ab}.
\end{aligned}$$

Dabei wurde in (*) die Substitution $s(\varphi) = \frac{a}{b}\varphi$, verwendet, die $s'(\varphi) = \frac{a}{b}$ liefert. Es gilt

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{a}{b} \tan(\frac{\pi}{2} - \epsilon) = \infty$$

und daher

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{\arctan(\frac{a}{b}\tan(\frac{\pi}{2}-\epsilon))}{ab} = \frac{\pi}{2ab}.$$

Es folgt

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} = \lim_{\epsilon \to 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}-\epsilon} \frac{d\varphi}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} = \frac{\pi}{2ab}.$$

Aufgabe 5

Es sei $f\colon [0,a] \to \mathbb{R}_+$ (für $a > 0$), eine streng monoton fallende, stetige Funktion. Zeigen Sie, dass $\int_0^a f(x)\sin(x)\,dx > 0$ gilt.

Lösung:

Zunächst eine Vorbemerkung: Falls $g\colon [c,d] \to [0,\infty)$ stetig und nicht konstant 0 ist, so existieren $x_1 < x_2 \in [c,d]$ und $\lambda > 0$ mit $g(x) \geq \lambda$ falls $x \in [x_1,x_2]$ (warum?). Daher gilt

$$\int_c^d g(x)dx \geq \int_{x_1}^{x_2} \lambda dx = \lambda(x_2 - x_1) > 0.$$

Sei nun $\bar{k} \in \mathbb{N}$ so, dass $a \in (2\bar{k}\pi, (2\bar{k}+1)\pi]$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_0^a f(x)\sin(x)dx &= \int_0^{2\bar{k}\pi} f(x)\sin(x)dx + \int_{2\bar{k}\pi}^a f(x)\sin(x)dx \\ &= \sum_{k=0}^{\bar{k}-1} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f(x)\sin(x)dx + \int_{2\bar{k}\pi}^a f(x)\sin(x)dx \\ &= \sum_{k=0}^{\bar{k}-1} \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} (f(x) - f(x+\pi))\sin(x)dx + \int_{2\bar{k}\pi}^a f(x)\sin(x)dx.\end{aligned}$$

Dabei sind die Integranden nichtverschwindende positive Funktionen – nach der Vorbemerkung sind die Integrale also echt positiv.