Abgabe Donnerstag, 18. Januar 2018, bis 8.15 Uhr in die jeweiligen Kästen.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Definiere Funktionen $f, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := |x|, \quad g(x) := \frac{1}{x^2}, \quad \text{und } h(x) := e^{x^2}.$$

(a) Zeigen Sie, dass f in 0 nicht differenzierbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass g und h differenzierbar sind und berechnen Sie die Ableitungen. Verwenden Sie bei der Berechnung die Definition des Differentialquotienten, und keine Ableitungsregeln (wie z.B. die Kettenregel).

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(a) über den Differentialquotienten analog zu 12.3(iv);

(b) mit Hilfe der Periodizitätseigenschaften von sin, cos sowie mit $\sin' x = \cos x$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Für $\arctan\colon (-\infty, \infty) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ gilt

$$\arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}.$$

(b) Es sei die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass g differenzierbar ist und bestimmen Sie die Ableitung.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

(a) Beweisen Sie induktiv die Leibniz-Formel für die n-te Ableitung eines Produkts von zwei n-mal differenzierbaren Funktionen f, g:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

(b) Zeigen Sie: $(x^2 \exp(x))^{(1000)} = (x^2 + 2000x + 999000) \exp(x)$.

Beispiele für Klausuraufgaben (ohne Wertung):

Aufgabe

Für eine differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $-3 \leq f'(x) \leq -1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Eigenschaften möglich: (Kreuzen Sie die richtigen Aussagen an.)

(a) $f(2) = 4$ und $f(4) = 2$
(b) $f(1) = 1$ und $f(6) = -20$
(c) $f(-1) = 3$ und $f(0) = 0$
(d) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -5$
(e) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

Aufgabe

(a) Was bedeutet es für eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar zu sein?
(b) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x\left(1 + x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie: f ist überall differenzierbar, aber nicht überall stetig differenzierbar.