Abgabe Donnerstag, 21. Dezember 2017, bis 8.15 Uhr in die jeweiligen Kästen.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Es sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Bestimmen Sie den Realteil und den Imaginärteil von $\frac{1}{z}$ (in Abhängigkeit vom Real- und Imaginärteil von z.)

(b) Zeigen Sie, dass die Gleichung $z^2 = c$ für jede komplexe Zahl $c \neq 0$ genau zwei Lösungen hat. Zeigen Sie, dass für die eine der beiden Lösungen folgendes gilt:

$$\mathrm{Re}(z) = \sqrt{\tfrac{|c|+\mathrm{Re}(c)}{2}}\,, \ \mathrm{Im}(z) = \sigma\sqrt{\tfrac{|c|-\mathrm{Re}(c)}{2}}\,, \quad \text{wo } \sigma := \begin{cases} +1, & \text{falls } \mathrm{Im}(c) \geq 0 \\ -1, & \text{falls } \mathrm{Im}(c) < 0. \end{cases}$$

Wie lautet die andere Lösung der Gleichung?

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Der Sinus hyperbolicus $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und der Cosinus hyperbolicus $\cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind definiert durch

$$\sinh(x) := \frac{1}{2}\left(\exp(x) - \exp(-x)\right), \quad \cosh(x) := \frac{1}{2}\left(\exp(x) + \exp(-x)\right),$$

für $x \in \mathbb{R}$.

(a) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen.

(b) Zeigen Sie, dass sinh und die Einschränkung von cosh auf $\mathbb{R}_+$ streng monoton wachsend sind. Folgern Sie, dass sinh und die Einschränkung $\cosh\colon \mathbb{R}_+ \to [1,\infty)$ bijektiv sind.

(c) Zeigen Sie, dass die Umkehrfunktionen Areasinus hyperbolicus $\mathrm{Arsinh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und Areacosinus hyperbolicus $\mathrm{Arcosh}\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig sind.

(d) Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right),$$

für $x \in \mathbb{R}$, und dass

$$\mathrm{Arcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right),$$

für $x \in [1,\infty)$ gilt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) Bringen Sie die Zahlen $\frac{3+4i}{2-i}$ und $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^k$, $k \in \mathbb{Z}$ in die Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) Skizzieren Sie die folgenden Punktmengen:

$$\big\{z \in \mathbb{C} : 2 < |z - (2+i)| < 3\big\}, \quad \big\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2, |\mathrm{Re}(z)| \leq \tfrac{1}{2}\big\}.$$

Machen Sie an den Rändern jeweils deutlich, ob diese zur Menge gehören oder nicht.