Abgabe Donnerstag, 14. Dezember 2017, bis 8.15 Uhr in die jeweiligen Kästen.

Aufgabe 1 (4 Extrapunkte)
Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Funktion, so dass $f(x+y) = f(x)f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie: Es gilt entweder $f \equiv 0$ oder $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Für (b) und (c) nehmen wir nun zusätzlich an, dass f nicht konstant 0 ist.

(b) Zeigen Sie: Für $q \in \mathbb{Q}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(qx) = f(x)^q$.

(c) Zeigen Sie: Falls f stetig ist, dann gilt $f(x) = a^x$ mit $a := f(1) > 0$ und für alle $x \in \mathbb{R}$. Spekulieren Sie darüber, ob Stetigkeit eine wesentliche Voraussetzung ist.

(d) Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln für allgemeine Potenzen:

$$\ln(a^x) = x \ln a, \quad (a^x)^y = a^{xy}, \quad a^x b^x = (ab)^x,$$

für $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ mit $a, b > 0$.

Aufgabe 2 (4 Extrapunkte)

(a) Es seien $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$. Sei $\bar{x} \in D$ ein Punkt, so dass Folgen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $D \cap (-\infty, \bar{x})$ und $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $D \cap (\bar{x}, \infty)$ existieren mit $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} r_n = \bar{x}$.
Zeigen Sie, dass f genau dann in $\bar{x}$ stetig ist, wenn $\lim_{x\nearrow\bar{x}} f(x) = f(\bar{x}) = \lim_{x\searrow\bar{x}} f(x)$.

(b) Beweisen Sie:

$$\lim_{x\searrow 0} x^x = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Aufgabe 3 (4 Extrapunkte)
Seien I ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine streng monoton wachsende (bzw. streng monoton fallende) stetige Funktion. Zeigen Sie: Die Menge $f(I)$ ist ein Intervall, die Abbildung $f\colon I \to f(I)$ ist bijektiv und $f^{-1}\colon f(I) \to I$ ist streng monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend) und stetig.
(D.h., beweisen Sie Bemerkung 9.18 aus der Vorlesung. Sie dürfen Satz 9.17 benutzen.)

Aufgabe 4 (4 Extrapunkte)
Über Nikolaus von Samarkand (den “Bäcker des Morgenlandes”) wird folgende Geschichte erzählt.
Sultan Ulugh Beg (“der Kurzarmige”) verfolgte die einigermaßen absurde Idee, die Erde sei eine Kugel; er versuchte, diese Theorie mit seinem selbstgebauten Observatorium nachzuweisen, was trotz immenser Kosten misslang.
Nikolaus, obschon keinesfalls um Rat gebeten, stellte die Frage: Wenn dies so sei, und wir lebten auf einer regelmäßigen Kugel mit Umfang, sagen wir, einhundert Millionen Ellen, und er, Nikolaus, spanne ein Seil rings um die Kugel, verlängere selbiges sodann schlankerhand um zwanzig Fuß und hebe es solchermaßen an, dass es überall denselben Abstand von der Oberfläche habe – welches Tier käme dann noch unterdurch: Die Giraffe, der Bär, der Hase, oder die Laus?
Weder Ulugh Beg noch seine Wesire wussten die Antwort; Nikolaus fand kein gutes Ende und der Sultan verwarf seine Theorie.
Können Sie Nikolaus’ Frage beantworten? Was ändert sich, wenn man die Erdoberfläche um die Fläche der Häute aller vierzigtausend Ziegen des Sultans vergrößert?