Abgabe Donnerstag, 7. Dezember 2017, bis 8.15 Uhr in die jeweiligen Kästen.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := x^3$, für $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Funktion f stetig, aber nicht gleichmäßig stetig ist. Zeigen Sie außerdem, dass für jedes beschränkte Intervall $[a, b]$ die Funktion $f|_{[a,b]}$ Lipschitz stetig ist.

(b) Es sei $g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x) := \sqrt[3]{x}$, für $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass g gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitz stetig ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass jedes Polynom ungeraden Grades ber $\mathbb{R}$ mindestens eine Nullstelle besitzt.

(b) Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Zeigen Sie, dass es keine stetige Funktion $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ gibt, die jeden ihrer Funktionswerte genau n Mal annimmt.
Hinweis: Verwenden Sie z.B., dass f ihr Minimum und ihr Maximum jeweils n Mal annimmt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass f genau dann injektiv ist, wenn f streng monoton ist.
Bleibt die Aussage richtig, falls f nicht unbedingt stetig ist?

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folgen reeller Zahlen und H die Menge der Häufungspunkte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $\liminf_{n\to\infty} a_n \in H$ und $\limsup_{n\to\infty} a_n \in H$.

(b) Es gilt $\liminf_{n\to\infty} = \inf(H)$ und $\limsup_{n\to\infty} a_n = \sup(H)$.
Hinweis: Für $h \in H$ und $n \in \mathbb{N}$ zeigen Sie z.B., dass

$$\inf\{a_k : k \geq n\} \leq h \leq \sup\{a_k : k \geq n\}.$$

(c) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent, wenn H aus genau einem Häufungspunkt besteht.
Hinweis: Zeigen Sie z.B., dass $\inf\{a_k : k \geq n\} \leq a_n \leq \sup\{a_k : k \geq n\}$, für alle n.

Bemerkung: Schreiben Sie Ihre Lösungen immer so auf, dass alle Rechen- oder Denkschritte nachvollziehbar sind.