Abgabe Donnerstag, 30. November 2017, bis 8.15 Uhr in die jeweiligen Kästen.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Es sei $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ und $b_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, für $n \in \mathbb{N}^*$. Zeigen Sie, dass die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ monoton sind.

(b) Zeigen Sie, dass die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ konvergieren und dass

$$2 < \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n < 3.$$

(c) Zeigen Sie, dass $\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \leq b_m$, für alle $m \in \mathbb{N}^*$.

(d) Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = e$.

Hinweise: Für (a) zeigen Sie z.B. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ und $\frac{b_n}{b_{n+1}} \geq 1$ mit der Bernoullischen Ungleichung. Für (c) zeigen Sie z.B. $b_m \geq \left(\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\right) - \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$. Zu $\varepsilon > 0$ kann man $n \in \mathbb{N}$ mit $m < n$ wählen, so dass $1 - \frac{\varepsilon}{3} < \left(1 - \frac{m}{n}\right)^m$. Es gilt $b_m \geq a_n$, und a_n kann durch $\left(1 - \frac{m}{n}\right)^m \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}$ abgeschätzt werden. Für (d) benutzen Sie z.B. (c) und Aufgabe 4(a) auf Blatt 2.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren oder divergieren:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$

Hinweis: Sie dürfen das Ergebnis aus Aufgabe 1(b) benutzen. Das Quotientenkriterium liefert eine konvergente Majorante im Fall $\theta < 1$; eine kleine Modifikation des Beweises liefert eine divergente Minorante im Fall $\theta > 1$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Exponentialfunktion streng monoton wachsend ist, d.h. für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ gilt $\exp(x) < \exp(y)$.

(b) Zeigen Sie, dass die Exponentialfunktion in 0 stetig ist. Folgern Sie daraus, dass die Exponentialfunktion auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.

Hinweis: Für (b) nutzen Sie z.B. die Restgliedabschätzung der Exponentialreihe.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Finden Sie alle Stellen, an denen die folgenden Funktionen stetig sind:

(a) Die Funktion $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x) := \begin{cases} 1, & x > \sqrt{2}; \\ -1, & x < \sqrt{2}. \end{cases}$

(b) Für $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ sei $x = \frac{p}{q}$ die eindeutige Darstellung als vollständig gekürzter Bruch mit positivem Nenner. Definiere dann $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $g(x) := \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cup \{0\}; \\ \frac{1}{q}, & x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}. \end{cases}$

Bemerkung: Schreiben Sie Ihre Lösungen immer so auf, dass alle Rechen- oder Denkschritte nachvollziehbar sind.