Abgabe Donnerstag, 23. November 2017, bis 8.15 Uhr in die jeweiligen Kästen.

Definition. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Dann definieren wir den *Limes inferior* und den *Limes superior* der Folge durch:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \inf \{a_k : k \geq n\}, \qquad \limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \sup \{a_k : k \geq n\}.$$

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Bestimmen Sie den Limes inferior und den Limes superior der Folgen:
(a) $a_n := (-1)^n + \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.
(b) $b_n := nx - [nx]$ mit $x = \frac{5}{8}$, $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Für beschränkte Folgen reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt
$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$
(b) Finden Sie ein Folgenpaar, für das die Ungleichung aus Teil (a) strikt ist (mit Beweis).

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Bestimmen Sie bei den folgenden Reihen jeweils, ob diese konvergieren.

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+4}{n^2 - 3n + 1}, \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \qquad \text{(c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{(n-1)}}{(-n)^n}.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

(a) Es sei $a_n := (-1)^n \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Sei $x \in \mathbb{R}$ gegeben. Zeigen Sie: Es gibt eine Bijektion $\gamma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\gamma(n)} = x$ gilt.
(b) Untersuchen Sie, ob die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ konvergiert. Bestimmen Sie ggf. den Grenzwert.

Hinweis zu (b): Schreiben Sie z.B. $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{x}{n} + \frac{y}{n+1} + \frac{z}{n+2}$ für geeignete x, y, z.

Aufgabe 5 - Zusatzaufgabe (4 Extrapunkte)

Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir
$$a_n := (-1)^n, \qquad b_n := \frac{n^2}{n^3+1}, \qquad c_n := \frac{4n^2-6n}{n^2+1}, \qquad d_n := \frac{n^2+1}{3n+1}.$$
Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz beziehungsweise Divergenz. Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Bemerkung: Schreiben Sie Ihre Lösungen immer so auf, dass alle Rechen- oder Denkschritte nachvollziehbar sind.