**Übungen zur Analysis 1** **Blatt 05**
**W. Winter, H. Thiel** **WS 2017/18**

Abgabe Donnerstag, 16. November 2017, bis 8.15 Uhr in die jeweiligen Kästen.

### Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n := (-1)^n + \frac{1}{n+1}$. Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Wir setzen $a_0 := 1$ and definieren $a_n$ für $n \geq 1$ rekursiv durch $a_n := 1 + \frac{1}{a_{n-1}}$. Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Limes. D.h. bestimmen Sie das Konvergenzverhalten des folgenden Kettenbruchs:

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cdots}}}}}}$$

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst eine Gleichung, die der Limes, falls er existiert, erfüllen muss. Untersuchen Sie dann das Monotonieverhalten der Folge.

### Aufgabe 2 (4 Punkte)

Für $x > 0$ definieren wir die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[0,1]$ durch $a_n := nx - [nx]$, wobei $[nx]$ die größte ganze Zahl ist, die kleiner oder gleich $nx$ ist. Zeigen Sie:

(a) Gilt $x \in \mathbb{Q}$, so hat $a_n$ endlich viele Häufungspunkte.

(b) Gilt $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, so ist jedes $a \in [0,1]$ Häufungspunkt der Folge.
Hinweis: Aus der Existenz irgendeines Häufungspunktes und weil $x$ irrational ist, folgt: Zu jedem $\delta > 0$ existieren $N \neq M$ in $\mathbb{N}$ mit $0 < a_N - a_M < \delta$. Der wesentliche Schritt ist nun, folgendes zu zeigen: $\forall\, b \in (0,1], \eta > 0, L \in \mathbb{N}\, \exists\, L < S \in \mathbb{N} : |a_S - b| < \eta$.

### Aufgabe 3 (4 Punkte)

Beweisen Sie: Jede Folge reeller Zahlen besitzt eine monotone Teilfolge.

### Aufgabe 4 (4 Punkte)

Wir entfernen aus dem Einheitsintervall das mittlere (offene) Drittel und erhalten eine disjunkte Vereinigung von zwei abgeschlossenen Intervallen. Aus diesen entfernen wir wieder die jeweils mittleren (offenen) Drittel und fahren so induktiv fort. Wir definieren die Cantormenge $C$ als den Durchschnitt der so entstandenen Mengen. Zeigen Sie:

(a) Die Menge $C$ ist nicht abzählbar.

(b) Zu jedem $x \in [0,1] \setminus C$ gibt es ein $\varepsilon > 0$, für das $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset [0,1] \setminus C$ gilt. (Man sagt dann auch, dass das Komplement von $C$ offen ist.)

Hinweis: Um die Notation zu fixieren, geben wir auf der Rückseite eine etwas formalere Beschreibung der Cantormenge. Die Grundidee der Konstruktion wird uns übrigens noch öfter begegnen; es lohnt sich daher, sich mit ihr vertraut zu machen.

Bemerkung: Schreiben Sie Ihre Lösungen immer so auf, dass alle Rechen- oder Denkschritte nachvollziehbar sind.

Falls $A = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall ist, so bezeichnen wir mit

$$A^{\left(\frac{1}{3}\right)} := \left(\tfrac{2}{3}a + \tfrac{1}{3}b, \tfrac{1}{3}a + \tfrac{2}{3}b\right)$$

das mittlere offene Drittel. (Die Menge $A \setminus A^{\left(\frac{1}{3}\right)}$ lässt sich dann als disjunkte Vereinigung von zwei abgeschlossenen Intervallen schreiben.)
Wir definieren nun induktiv Teilmengen $C_n \subset [0, 1], n \in \mathbb{N}$, wie folgt:

(i) Setze $C_0 := [0, 1]$.
(ii) Sei $C_n = C_{n,1} \cup \ldots \cup C_{n,2^n}$ als disjunkte Vereinigung von $2^n$ abgeschlossenen Intervallen $C_{n,i}$, $i = 1, \ldots, 2^n$, bereits konstruiert. Setze

$$C_{n+1} := \left(C_{n,1} \setminus C_{n,1}^{\left(\frac{1}{3}\right)}\right) \cup \ldots \cup \left(C_{n,2^n} \setminus C_{n,2^n}^{\left(\frac{1}{3}\right)}\right),$$

dann lässt sich $C_{n+1}$ offensichtlich als disjunkte Vereinigung von $2^{n+1}$ abgeschlossenen Intervallen schreiben.

Wir definieren nun die Cantormenge

$$C := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n.$$

Schematisch sieht die Konstruktion in etwa so aus: