Abgabe Donnerstag, 9. November 2017, bis 8.15 Uhr in die jeweiligen Kästen.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass jedes Intervall in den reellen Zahlen die Vereinigung von abzählbar vielen abgeschlossenen Intervallen ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass es ein $x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})_+$ mit $x^k \notin \mathbb{Q}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 1$ gibt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:
(a) Die Menge $\mathcal{P}'(\mathbb{N}) := \{\text{endliche Teilmengen von } \mathbb{N}\}$ ist abzählbar.
(b) Die Menge $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{\text{Teilmengen von } \mathbb{N}\}$ ist nicht abzählbar.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:
(a) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$, und sei $s \in \mathbb{R}$ mit $s \geq x_n$ (bzw. $s \leq x_n$) für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $s \geq \lim_{n\to\infty} x_n$ (bzw. $s \leq \lim_{n\to\infty} x_n$).
(b) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n > 0$. Dann sind alle bis auf endlich viele $x_n > 0$.
(c) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $\mathbb{R}$, und sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Dann ist $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Bemerkung: Schreiben Sie Ihre Lösungen immer so auf, dass alle Rechen- oder Denkschritte nachvollziehbar sind.