Abgabe Donnerstag, 2. November 2017, bis 8.15 Uhr in die jeweiligen Kästen.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei $M \subseteq \mathbb{Z}$ eine nichtleere endliche Teilmenge. Zeigen Sie, dass M ein größtes und ein kleinstes Element hat.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei K ein vollständig angeordneter Körper. Zeigen Sie, dass K archimedisch angeordnet ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeigen Sie: Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ und jedem $\varepsilon > 0$ existieren $y \in \mathbb{Q}$ mit $|x - y| < \varepsilon$ und $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $|x - z| < \varepsilon$.
(Für den zweiten Teil dürfen Sie benutzen, dass $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nichtleer ist.)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Menge $M := \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\} \subseteq \mathbb{R}$ ein Supremum s besitzt. Zeigen Sie weiterhin $s^2 = 2$ und $s \notin \mathbb{Q}$.

Bemerkung: Schreiben Sie Ihre Lösungen immer so auf, dass alle Rechen- oder Denkschritte nachvollziehbar sind.