Übungen zur Analysis 1 **Blatt 02**
W. Winter, H. Thiel **WS 2017/18**

Abgabe Donnerstag, 26. Oktober 2017, bis 8.15 Uhr in die jeweiligen Kästen.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden Anmerkungen zu den Körperaxiomen. Benutzen Sie dabei ausschließlich die Körperaxiome und geben Sie in jedem Schritt an, welches derselben Sie gerade benutzen.

(a) Die Elemente 0 und 1 sind durch ihre Eigenschaften eindeutig bestimmt.
(b) Es seien $x \in K$ und $y \in K \setminus \{0\}$ gegeben. Dann sind die Elemente $-x$ und y^{-1} eindeutig bestimmt.
(c) Für alle $x \in K$ gilt $x \cdot 0 = 0$.
(d) Für alle $x, y \in K$ gilt: Falls $x \cdot y = 0$, dann ist $x = 0$ oder $y = 0$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei K ein archimedisch angeordneter Körper. Beweisen Sie die folgenden Aussagen aus der Vorlesung:

(a) Für alle $\varepsilon > 0$ existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$, so dass $n^{-1} < \varepsilon$.
(b) Sei $b > 1$. Dann gilt: Für alle $K \in \mathbb{N}$ existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $b^n > K$.
(c) Sei $1 > b > 0$. Dann gilt: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $b^n < \varepsilon$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Verifizieren Sie die folgenden Ungleichungen:

(a) $n^2 \leq 2^n$ für jede natürliche Zahl $n \neq 3$.
(b) $2^n < n!$ für jede natürliche Zahl $n \geq 4$.
(c) Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ und jede natürliche Zahl k gilt $\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen für alle natürliche Zahlen $n \geq 1$:

(a) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 3$.
(b) $\left(\frac{n}{3}\right)^n \leq \frac{1}{3} n!$.

(Hinweis: Sie dürfen Ergebnisse aus anderen Aufgaben sowie aus der Vorlesung benutzen. Zum Beispiel kann man 4(a) verwenden, um $(n+1)^n$ abzuschätzen.)

Bemerkung: Schreiben Sie Ihre Lösungen immer so auf, dass alle Rechen- oder Denkschritte nachvollziehbar sind.