Mögliche Lösungen für Blatt 02

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden Anmerkungen zu den Körperaxiomen. Benutzen Sie dabei ausschließlich die Körperaxiome und geben Sie in jedem Schritt an, welches derselben Sie gerade benutzen.

(a) Die Elemente 0 und 1 sind durch ihre Eigenschaften eindeutig bestimmt.
(b) Es seien $x \in K$ und $y \in K \setminus \{0\}$ gegeben. Dann sind die Elemente $-x$ und y^{-1} eindeutig bestimmt.
(c) Für alle $x \in K$ gilt $x \cdot 0 = 0$.
(d) Für alle $x, y \in K$ gilt: Falls $x \cdot y = 0$, dann ist $x = 0$ oder $y = 0$.

Mögliche Lösung:

(a) Sei $0'$ ein weiteres Nullelement. Dann gilt $0 + 0' = 0$. Da 0 ein Nullelement ist, gilt $0' + 0 = 0'$. Wir verwenden im zweiten Schritt die Kommutativität der Addition und erhalten:

$$0 = 0 + 0' = 0' + 0 = 0'.$$

Sei $1'$ ein weiteres Einselement. Dann gilt $11' = 1$. Da 1 ein Einselement ist, gilt $1'1 = 1'$. Wir verwenden im zweiten Schritt die Kommutativität der Multipliktation und erhalten:

$$1 = 11' = 1'1 = 1'.$$

(b) Es sei $a \in K$ ein weiteres Element mit $x + a = 0$. Es folgt $x + (-x) = x + a$. Wir addieren $-x$ (von links) und erhalten:

$$(-x) + (x + (-x)) = (-x) + (x + a).$$

Mit dem Kommutativgesetz der Addition folgt aus $x + (-x) = 0$, dass $(-x) + x = 0$ gilt. Wir wenden beim ersten und letzten Schritt die Eigenschaft der Null an, wir wenden beim zweiten und vorletzten Schritt die Kommutativität der Addition an, und wir wenden beim vierten und sechsten Schritt die Assoziativität der Addition an und erhalten

$$\begin{aligned}(-x) &= (-x) + 0 = 0 + (-x) = ((-x) + x) + (-x) = (-x) + (x + (-x))\\ &= (-x) + (x + a) = ((-x) + x) + a = 0 + a = a + 0 = a.\end{aligned}$$

Die Eindeutigkeit von y^{-1} zeigt man analog.

(c) Es gilt $0 + 0 = 0$. Wir wenden beim zweiten Schritt das Distributivitätsgesetz an und erhalten

$$x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0.$$

Durch Subtraktion von $-(x \cdot 0)$ erhalten wir $0 = x \cdot 0$.

(d) Angenommen $xy = 0$. Falls $x = 0$, so sind wir fertig. Andernfalls existiert x^{-1}. Dann folgt

$$y = y \cdot 1 = 1 \cdot y = (x^{-1}x)y = x^{-1}(xy) = x^{-1} \cdot 0 = 0.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei K ein archimedisch angeordneter Körper. Beweisen Sie die folgenden Aussagen aus der Vorlesung:

(a) Für alle $\varepsilon > 0$ existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$, so dass $n^{-1} < \varepsilon$.
(b) Sei $b > 1$. Dann gilt: Für alle $K \in \mathbb{N}$ existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $b^n > K$.
(c) Sei $1 > b > 0$. Dann gilt: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $b^n < \varepsilon$.

Mögliche Lösung:

Wir zeigen zuerst (ii) aus Vorlesung 2.5: Für $x \in K$ gilt $0 < x$ genau dann, wenn $-x < 0$. Sei also $x \in K$ mit $0 < x$. Es gilt entweder $0 < (-x)$, oder $0 = -x$, oder $-x < 0$. Im ersten Fall folgt $0 < x + (-x) = 0$, ein Widerspruch. Im zweiten Fall folgt $0 = x$, ein Widerspruch. Also folgt $-x < 0$. Die Rückrichtung folgt analog.
Wir zeigen (vi) aus Vorlesung 2.5: Für $x, y, a \in K$ mit $x < y$ und $0 < a$ gilt $ax < ay$. Sei also $x, y, a \in K$ mit $x < y$ und $0 < a$. Es folgt $y-x \in K_+$. Nach (O3) folgt $a(y-x) \in K_+$. Nach dem Distributivgesetz gilt $a(y-x) = ay - ax$. Es folgt $ay - ax \in K_+$ und daher $ax < ay$.
Wir zeigen nun (ix) aus Vorlesung 3.5: Es gilt $0 < 1$. Wir zeigen die Behauptung. Offenbar gilt nicht $0 = 1$. Angenommen, $1 < 0$. Dann folgt $0 < (-1)$ und dann $0 < (-1)(-1) = 1$, ein Widerspruch. Also gilt $0 < 1$.
Wir zeigen nun, dass aus $x \in K_+$ schon $x^{-1} \in K_+$ folgt. Um die Behauptung zu beweisen, sei $x \in K_+$. Dann gilt $x \neq 0$ und x^{-1} existiert. Es gilt $x^{-1} > 0$, oder $x^{-1} = 0$, oder $x^{-1} < 0$. Im ersten Fall sind wir fertig. Im zweiten Fall folgt durch Multiplikation mit x, dass $1 = 0$, ein Widerspruch. Im dritten Fall folgt durch Multiplikation mit x, dass $1 < 0$, ein Widerspruch.
Wir zeigen nun (viii) aus Vorlesung 3.5: Für $x, y \in K$ mit $0 < x < y$ gilt $0 < y^{-1} < x^{-1}$. Seien also $x, y \in K$ mit $0 < x < y$. Es folgt $0 < x^{-1}$ und $0 < y^{-1}$. Durch Multiplikation der Ungleichung $x < y$ mit x^{-1} und y^{-1} erhalten wir:

$$y^{-1} = x^{-1}xy^{-1} < x^{-1}yy^{-1} = x^{-1}.$$

(a) Sei $\varepsilon > 0$. Es gilt $1 > 0$. Nach dem Archimedische Axiom gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $n\varepsilon > 1$. Es folgt $n \geq 1$. Multiplikation mit n^{-1} ergibt $\varepsilon > n^{-1}$, was zeigt, dass n die gewünschten Eigenschaften hat.

(b) Sei $b > 1$ und $K \in \mathbb{N}$. Setze $x := b - 1$. Dann gilt $x > 0$. Nach dem Archimedische Axiom gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $nx > K$. Wir wenden beim zweiten Schritt die Bernoullischen Ungleichung (Proposition 2.7) an, und erhalten

$$b^n = (1 + x)^n \geq 1 + nx > 1 + K > K.$$

Dies zeigt, dass n die gewünschten Eigenschaften hat.

(c) Sei $1 > b > 0$ und $\varepsilon > 0$. Nach Teil (a) gibt es $K \in \mathbb{N}$ mit $K^{-1} < \varepsilon$. Aus $0 < b < 1$ folgt $0 < 1^{-1} = 1 < b^{-1}$. Nach Teil (b) gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $K < (b^{-1})^n$. Es gilt $(b^{-1})^n = (b^n)^{-1}$ und daher $b^n < K^{-1}$. Insgesamt erhalten wir $b^n > \varepsilon$, was zeigt, dass n die gewünschten Eigenschaften hat.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Verifizieren Sie die folgenden Ungleichungen:
(a) $n^2 \leq 2^n$ für jede natürliche Zahl $n \neq 3$.
(b) $2^n < n!$ für jede natürliche Zahl $n \geq 4$.
(c) Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ und jede natürliche Zahl k gilt $\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!}$.

Mögliche Lösung:

(a) Für $n = 0$ gilt $n^2 = 0 \leq 1 = 2^n$. Für $n = 1$ gilt $n^2 = 1 \leq 2 = 2^n$. Für $n = 2$ gilt $n^2 = 4 \leq 4 = 2^n$. Wir zeigen nun $n^2 \leq 2^n$ duch vollständige Induktion für $n \geq 4$. Der Induktionsanfang ist $n = 4$. Für $n = 4$ gilt $n^2 = 16 \leq 16 = 2^n$.
Angenommen, die Aussage gilt für n. Für $k \geq 4$ gilt

$$\left(\tfrac{k+1}{k}\right)^2 = \left(1 + \tfrac{1}{k}\right)^2 \leq \left(1 + \tfrac{1}{4}\right)^2 = 1,5625 \leq 2.$$

Für $n + 1$ berechnen wir, indem wir beim zweiten Schritt die Induktionsvorraussetzung und die obige Abschätzung benutzen:

$$(n + 1)^2 = \left(\tfrac{n+1}{n}\right)^2 n^2 \leq 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}.$$

(b) Wir beweisen die Aussage duch vollständige Induktion für $n \geq 4$. Der Induktionsanfang ist $n = 4$. Für $n = 4$ gilt $2^n = 16 < 24 = n!$.
Angenommen, die Aussage gilt für n. Es folgt

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n < 2 \cdot n! \leq (n + 1)n! = (n + 1)!.$$

(c) Die Aussage gilt für $k = 0$ und falls $n < k$. Für $1 \leq k \leq n$ gilt:

$$n! = n(n - 1) \cdot \ldots \cdot (n - k + 2)(n - k + 1) \cdot (n - k)! \leq n^k \cdot (n - k)!.$$

Es folgt

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}\frac{1}{n^k} \leq \frac{n^k (n-k)!}{k! \cdot (n-k)!}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen für alle natürliche Zahlen $n \geq 1$:

(a) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 3$.

(b) $\left(\frac{n}{3}\right)^n \leq \frac{1}{3} n!$.

Mögliche Lösung:

(a) Wir beweisen zuerst die Ungleichung $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. Wir wenden im ersten Schritt den Binomischen Lehrsatz an, und wir verwenden die Abschätzung aus Aufgabe 3(c) im dritten Schrit, und erhalten

$$\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Wir zeigen nun die Ungleichung $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 3$. Aus Aufgabe 3(b) folgt $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^n}$ für $n \geq 4$. Wir wissen außerdem, dass $\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2^k} \leq 1$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Wir können $n \geq 4$ annehmen und erhalten

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \sum_{k=4}^{n} \frac{1}{k!} \leq 2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2^3} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \leq 2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2^3} < 3.$$

(b) Wir beweisen die Ungleichung duch vollständige Induktion für $n \geq 1$. Der Induktionsanfang ist $n = 1$. Es gilt $\left(\frac{n}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \leq \frac{1}{3} = \frac{1}{3} n!$.
Angenommen wir haben die Ungleichung für n gezeigt. Wir wenden Aufgabe 4(a) beim dritten Schritt an, wir wenden die Induktionsvorraussetzung beim vorletzten Schritt an, und erhalten

$$\begin{aligned} \left(\tfrac{n+1}{3}\right)^{n+1} &= \left(\tfrac{1}{3}\right)^{n+1} (n+1)^{n+1} = \left(\tfrac{1}{3}\right)^{n+1} (n+1)\,(n+1)^n \\ &\leq \left(\tfrac{1}{3}\right)^{n+1} (n+1) 3n^n = \left(\tfrac{n}{3}\right)^n (n+1) \leq \tfrac{1}{3} n!(n+1) = \tfrac{1}{3}(n+1)!. \end{aligned}$$