Abgabe Donnerstag, 19. Oktober 2017, bis 8.15 Uhr in die jeweiligen Kästen.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Es seien $M = \{a, b, c, d\}$, $N = \{1, 2, 3, 4\}$. Geben Sie zwei verschiedene Bijektionen $f\colon M \to N$ und $g\colon M \to N$ an. Begründen Sie, weshalb es sich um Bijektionen handelt und weshalb sie unterschiedlich sind.

(b) Es seien die Mengen $\underline{n} = \{1, 2, \ldots, n\}$ und $\underline{m} = \{1, 2, \ldots, m\}$ gegeben. Wie viele Abbildungen $\underline{n} \to \underline{m}$ gibt es?

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei X eine nichtleere Menge und $\emptyset \neq \mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein System von Teilmengen von X. Beweisen Sie die de Morgan'sche Regel:

$$X \setminus \left(\bigcap_{M \in \mathcal{S}} M \right) = \bigcup_{M \in \mathcal{S}} X \setminus M.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei n eine natürliche Zahl mit $n \geq 1$. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Für $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 1$ definiere

$$\binom{x}{k} := \prod_{j=1}^{k} \frac{x-j+1}{j}.$$

Beweisen Sie: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt:

$$\binom{x+y}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{n-k} \binom{y}{k}.$$

Bemerkung: Schreiben Sie Ihre Lösungen immer so auf, dass alle Rechen- oder Denkschritte nachvollziehbar sind.

Präsenzaufgabe 1

(a) Zeigen Sie, dass die Anzahl k-elementiger Teilmengen einer n-elementigen Menge $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ ist.

(b) Bestimmen Sie die Anzahl der Teilmengen einer n-elementigen Menge einmal durch Abzählen und einmal unter Nutzung des Ergebnisses aus Teil (a).

Präsenzaufgabe 2

(a) Beweisen Sie: Für jede natürliche Zahl n gilt

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

(b) Beweisen Sie: Für jede natürliche Zahl n gilt

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$