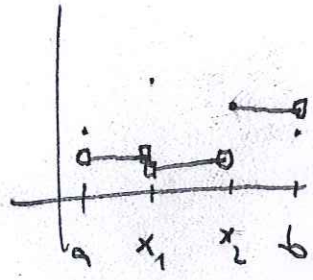
13. Integration

„Aber meine Herren, eine Fakultät ist doch keine Badeanstalt!"

David Hilbert

13.1 Def.: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion, falls eine Zerlegung $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$ existiert, so dass für jedes $k=1,\dots,n$ $f|_{(x_{k-1},x_k)}$ konstant ist.

$\mathcal{T}([a,b]) := \{\text{Treppenfunktionen } f:[a,b]\to\mathbb{R}\}$.



13.2 Bem.: $\mathcal{T}([a,b])$ ist $\mathbb{R}$-VR.

Bew.: Seien $f,g\in\mathcal{T}([a,b])$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$,

$a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$ eine Zerlegung für f,

$a=y_0<y_1<\dots<y_m=b$ eine Zerlegung für g.

Seien $z_0<z_1<\dots<z_q$ die Elemente von $\{x_0,\dots,x_n\}\cup\{y_0,\dots,y_m\}$, dann gilt $z_0=a$, $z_q=b$, und für jedes $l\in\{1,\dots,q\}$ existiert ein $k\in\{1,\dots,n\}$ und ein $r\in\{1,\dots,m\}$ mit

$(z_{l-1},z_l)\subset(x_{k-1},x_k)\cap(y_{r-1},y_r)$.

Dann ist aber $(\lambda f+\mu g)|_{(z_{l-1},z_l)}$ konstant für jedes $l\in\{1,\dots,q\}$, d.h. $\lambda f+\mu g\in\mathcal{T}([a,b])$. $\square$

13.3 <u>Def. und Prop.:</u> Sei $f \in \mathcal{T}([a,b])$. Wir definieren das Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx := \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \cdot (x_k - x_{k-1}),$$

wo $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ eine Zerlegung ist so dass

$$f|_{(x_{k-1}, x_k)} \equiv \gamma_k.$$

$\int_a^b f(x)\,dx$ ist unabhängig von der Zerlegung für f.

Bew.: Seien $a = x_0 < \dots < x_n = b$ bzw. $a = y_0 < \dots < y_m = b$ Zerlegungen für f mit $f|_{(x_{k-1}, x_k)} \equiv \gamma_k$ und $f|_{(y_{\nu-1}, y_\nu)} \equiv \delta_\nu$.

Sei $Z := \{x_0, \dots, x_n\} \cup \{y_1, \dots, y_m\} = \{z_0, \dots, z_q\}$ mit $z_0 < z_1 < \dots < z_q$, dann gilt $a = z_0$, $b = z_q$ und für jedes $\ell \in \{1, \dots, q\}$ existieren $k_\ell \in \{1, \dots, n\}$ und $\nu_\ell \in \{1, \dots, m\}$ mit

$$(z_{\ell-1}, z_\ell) \subset (x_{k_\ell - 1}, x_{k_\ell}) \cap (y_{\nu_\ell - 1}, y_{\nu_\ell}).$$

Es gilt dann $\{1, \dots, q\} = \bigcup_{k=1}^{n} \{\ell \mid k_\ell = k\}$ und

$\bigcup_{\{\ell \mid k_\ell = k\}} [z_{\ell-1}, z_\ell] = [x_{k-1}, x_k]$, also $\sum_{\{\ell \mid k_\ell = k\}} (z_\ell - z_{\ell-1}) = x_k - x_{k-1}$. [Warum?]

Setze $\gamma_\ell := \gamma_{k_\ell}$; es gilt $\gamma_{k_\ell} = \delta_{\nu_\ell}$ für alle ℓ (warum?).

Insgesamt erhalten

$$\sum_{l\in\{1,\dots,z\}} J_l\cdot(z_l-z_{l-1}) = \sum_{k\in\{1,\dots,n\}}\ \sum_{\{l\mid h_l=k\}} J_l\,(z_l-z_{l-1})$$

$$= \sum_{k\in\{1,\dots,n\}}\ \sum_{\{l\mid h_l=k\}} \gamma_k\cdot(z_l-z_{l-1})$$

$$= \sum_{k\in\{1,\dots,n\}} \gamma_k\cdot\sum_{\{l\mid h_l=k\}}(z_l-z_{l-1})$$

$$= \sum_{k\in\{1,\dots,n\}} \gamma_k\cdot(x_k-x_{k-1}),$$

ebenso

$$\sum_{l\in\{1,\dots,z\}} J_l\cdot(z_l-z_{l-1}) = \sum_{\nu\in\{1,\dots,m\}} \delta_\nu\,(y_\nu-y_{\nu-1}).$$

$\square$

13.4 <u>Prop.:</u> Seien $f,g\in\mathcal{T}([a,b])$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, dann gilt:

(i) $\displaystyle\int_a^b(\lambda\cdot f+\mu\cdot g)(x)\,dx = \lambda\cdot\int_a^b f(x)\,dx+\mu\cdot\int_a^b g(x)\,dx$

(ii) $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b|f(x)|\,dx \le (b-a)\sup\{|f(x)|\mid x\in[a,b]\} < \infty.$

(Insbesondere gilt $|f|\in\mathcal{T}([a,b])$ und f ist beschränkt.)

(iii) $\displaystyle f\le g \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$

Bew.: Sei $a = z_0 < \dots < z_q = b$ gemeinsame Zerlegung für f und g (wie in 13.3) mit

$$f\big|_{(z_{k-1}, z_k)} \equiv \gamma_k \quad , \quad g\big|_{(z_{k-1}, z_k)} \equiv \delta_k .$$

(i) $$\int_a^b (\lambda \cdot f + \mu \cdot g)(x)\,dx = \sum_{k=1}^{q} (\lambda \cdot \gamma_k + \mu \cdot \delta_k) \cdot (z_k - z_{k-1})$$

$$= \lambda \cdot \sum_{k=1}^{q} \gamma_k \cdot (z_k - z_{k-1}) + \mu \cdot \sum_{k=1}^{q} \delta_k (z_k - z_{k-1})$$

$$= \lambda \cdot \int_a^b f(x)\,dx + \mu \cdot \int_a^b g(x)\,dx .$$

(iii) analog, (ii) einfache Übg. $\square$

13.5 <u>Def.:</u> Sei Γ ein Intervall. Für $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ beschränkt definieren wir $\|f\|_{\infty, \Gamma} := \sup\{ |f(x)| \mid x \in \Gamma \}$.

Wir schreiben auch $\|f\|_\infty$ für $\|f\|_{\infty, \Gamma}$.

13.6 <u>Prop.:</u> $\|\cdot\|_\infty$ ist eine Norm auf dem VR $\{ f : \Gamma \to \mathbb{R} \text{ beschränkt} \}$, d.h.

(i) $\|f\|_\infty \geq 0$ und $f = 0 \iff \|f\|_\infty = 0$.

(ii) $\|\lambda \cdot f\|_\infty = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$

(iii) $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Bew.: (iii): $\sup\{ |(f + g)(x)| \mid x \in \Gamma \} = \sup\{ |f(x) + g(x)| \mid x \in \Gamma \}$

$\leq \sup\{ |f(x)| + |g(x)| \mid x \in \Gamma \} \leq \sup\{ |f(x)| \mid x \in \Gamma \} + \sup\{ |g(x)| \mid x \in \Gamma \}$.

Rest analog, mit Eigenschaften von $|\cdot|$. $\square$

13.7 <u>Def.:</u> $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ heißt Regelfunktion, falls gilt:

$$\forall \varepsilon>0\ \exists\, g\in \mathcal{T}([a,b]) \text{ mit } \|f-g\|_\infty<\varepsilon.$$

$$\mathcal{R}([a,b]) := \{\text{Regelfunktionen auf } [a,b]\}.$$

13.8 <u>7.13.1</u> (i) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow f\in\mathcal{R}([a,b])$.

Bew.: Sei $\varepsilon>0$.

f glm. stetig $\Rightarrow \exists\,\delta>0 : (|x-x'|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x')|<\varepsilon)$
[Satz 9.15]

$\rightsquigarrow\ a=x_0<x_1<\dots<x_m=b$ mit $|x_i-x_{i-1}|<\delta,\ i=1,\dots,m$.

Setze $g(x)=\begin{cases} f(x_i), & \text{falls } x_i\le x<x_{i+1} \text{ für } i\in\{1,\dots,m-1\}\\ f(x_m), & \text{falls } x_m=b.\end{cases}$

$\rightsquigarrow\ g\in\mathcal{T}([a,b]),\ \|g-f\|<\varepsilon.$

(ii) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ monoton $\Rightarrow f\in\mathcal{R}([a,b])$.

Bew.: Übg.

(iii) $\chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}\notin\mathcal{R}([0,1])$, wo $\chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}$.

Bew.: Übg.

(iv) $\chi_C\in\mathcal{R}([0,1])$, wo $C\subset[0,1]$ die Cantormenge ist

mit $\chi_C(x)=\begin{cases}1, & x\in C\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}$.

Bew.: Übg. (v) $f,g\in\mathcal{R}([a,b]) \Rightarrow f\cdot g\in\mathcal{R}([a,b]),\ \lambda f+\mu g\in\mathcal{R}([a,b])$.

13.9 <u>Bem.:</u> Eine Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ist stetig, genau dann wenn für jedes $\bar{x}\in[a,b)$ gilt $\lim\limits_{\substack{x\searrow\bar{x}\\ x\neq\bar{x}}} f(x)=f(\bar{x})$ und für jedes $\bar{x}\in(a,b]$ gilt $\lim\limits_{\substack{x\nearrow\bar{x}\\ x\neq\bar{x}}} f(x)=f(\bar{x})$.

Für Regelfunktionen kann man eine ähnliche Charakterisierung zeigen:

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ist Regelfunktion, genau dann wenn für jedes $\bar{x}\in[a,b)$ $\lim\limits_{\substack{x\searrow\bar{x}\\ x\neq\bar{x}}} f(x)$ existiert und für jedes $\bar{x}\in(a,b]$ $\lim\limits_{\substack{x\nearrow\bar{x}\\ x\neq\bar{x}}} f(x)$ existiert.

o. Beweis.

13.10 <u>Def. und Satz</u> (Regelintegral): Für $f\in\mathcal{R}([a,b])$ definieren wir

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{n\to\infty}\int_a^b g_n(x)\,dx,$$

wo $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{T}([a,b])$ eine Folge von Treppenfunktionen ist mit $\|f-g_n\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Insbesondere existiert solch eine Folge sowie der Limes, und der Wert hängt nicht von der Folge ab.

Wir setzen $\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^a f(x)\,dx := 0$.

Bew.: Sei $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}([a,b])$ eine Folge mit $\|f-g_n\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

[Woher existiert $(g_n)_N$?]

Setze $I_n := \int_a^b g_n(x)\,dx$, dann ist $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ Cauchyfolge:

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ so dass $\|f-g_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ falls $n \geq N$.

Dann gilt für $n, m \geq N$:

$$|I_n - I_m| \overset{13.4(i)}{=} \left|\int_a^b (g_n - g_m)(x)\,dx\right| \overset{13.4(ii)}{\leq} (b-a)\|g_n - g_m\|_\infty$$

$$\overset{13.6(iii)}{\leq} (b-a)\left(\|g_n - f\|_\infty + \|f - g_m\|_\infty\right) < \varepsilon.$$

$\Rightarrow (I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy und $\lim_{n\to\infty} I_n$ existiert.

Sei nun $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}([a,b])$ eine weitere Folge mit $\|f-h_n\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Setze $J_n := \int_a^b h_n(x)\,dx$.

Dann konvergieren nach demselben Argument auch die Folgen $J_0, J_1, J_2, \ldots$ und $I_0, J_0, I_1, J_1, \ldots$, dann müssen aber auch die Grenzwerte übereinstimmen und es gilt $\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} J_n$. $\square$

13.11 <u>Prop.</u> Seien $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(i) $\int_a^b (\lambda \cdot f + \mu \cdot g)(x)\,dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x)\,dx + \mu \cdot \int_a^b g(x)\,dx$

(ii) $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \leq (b-a)\,\|f\|_\infty < \infty.$

(Insbesondere gilt $|f| \in \mathcal{R}([a,b])$ und f ist beschränkt.)

(iii) $f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$

Bew.: Seien $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}, (e_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}([a,b])$ mit

$\|d_n - f\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$, $\|e_n - g\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

(i) Dann gilt $\|\underbrace{(\lambda \cdot d_n + \mu \cdot e_n)}_{\in \mathcal{T}([a,b])} - (\lambda \cdot f + \mu \cdot g)\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$ [wieso?]

und $\int_a^b (\lambda \cdot f + \mu \cdot g)(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b (\lambda \cdot d_n + \mu \cdot e_n)(x)\,dx$

$$\overset{13.4(i)}{=} \lim_{n\to\infty} \lambda \cdot \int_a^b d_n(x)\,dx + \mu \cdot \int_a^b e_n(x)\,dx$$

$$= \lambda \cdot \lim_{n\to\infty} \int_a^b d_n(x)\,dx + \mu \cdot \lim_{n\to\infty} \int_a^b e_n(x)\,dx$$

$$= \lambda \cdot \int_a^b f(x)\,dx + \mu \cdot \int_a^b g(x)\,dx.$$

(ii), (iii) analog, mit 13.4 (ii), (iii). $\square$

13.12 <u>Bem.:</u> $a < b < c$, $f \in \mathcal{R}([a,c])$. Dann gilt

$$f|_{[a,b]} \in \mathcal{R}([a,b]), \quad f|_{[b,c]} \in \mathcal{R}([b,c]) \text{ und}$$

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

[Triviale Bezeichnungen]

Bew.: Klar für Treppenfunktionen, damit aber auch für die Limiten. □

13.13 <u>Mittelwertsatz</u> der Integralrechnung:

Sei $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g \in \mathcal{R}([a,b])$ mit $g \geq 0$.

Dann existiert $\bar{x} \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(\bar{x}) \cdot \int_a^b g(x)\,dx.$$

Insbesondere existiert $\bar{\bar{x}} \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\bar{\bar{x}}) \cdot (b-a).$$

Bew.: Setze $M := \sup\{|f(x)| \mid x \in [a,b]\} = \max\{|f(x)| \mid x \in [a,b]\}$,

$m := \inf\{|f(x)| \mid x \in [a,b]\} = \min\{|f(x)| \mid x \in [a,b]\}$.

Dann gilt

$$m \cdot \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b m \cdot g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \overset{13.4(iii)}{\leq} \int_a^b M \cdot g(x)\,dx = M \cdot \int_a^b g(x)\,dx,$$

also existiert $\mu \in [m, M]$ mit $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \mu \cdot \int_a^b g(x)\,dx$.

ZWS $\Rightarrow \exists\, \bar{x} \in [a,b] : f(\bar{x}) = \mu$.

Die zweite Aussage folgt mit $g \equiv 1$. □

13.14 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

Sei I ein offenes Intervall, $a \in I$ und $f: I \to \mathbb{R}$ stetig.

Wir definieren $F: I \to \mathbb{R}$ durch

$$F(t) := \int_a^t f(x)\,dx.$$

(i) F ist Stammfunktion von f, d.h. F ist differenzierbar auf I mit $F'(t) = f(t)$ für alle $t \in I$.

(ii) Ist $G: I \to \mathbb{R}$ eine weitere Stammfunktion von f, so gilt $F(t) = G(t) - G(a) =: G(x)\Big|_a^t$.

Wir schreiben auch $\int f(x)\,dx = F(x) + C$.

Bew.: (i) Sei $t_0 \in I$. Für $t_0 < t \in I$ gilt

$$\left|\frac{F(t)-F(t_0)}{t-t_0} - f(t_0)\right| = \frac{|F(t)-F(t_0) - f(t_0)(t-t_0)|}{t-t_0}$$

$$= \frac{\left|F(t)-F(t_0) - \int_{t_0}^t f(t_0)\,dx\right|}{t-t_0} = \frac{\left|\int_a^t f(x)\,dx - \int_a^{t_0} f(x)\,dx - \int_{t_0}^t f(t_0)\,dx\right|}{t-t_0}$$

$$= \frac{\left|\int_{t_0}^t f(x)\,dx + \int_a^{t_0} f(x)\,dx - \int_a^{t_0} f(x)\,dx - \int_{t_0}^t f(t_0)\,dx\right|}{t-t_0} = \frac{\left|\int_{t_0}^t (f(x)-f(t_0))\,dx\right|}{t-t_0}$$

$$\leq \frac{\sup\{|f(x)-f(t_0)| \mid x \in [t_0, t]\}\cdot(t-t_0)}{t-t_0} = \sup\{|f(x)-f(t_0)| \mid x \in [t_0, t]\} \xrightarrow{t \to t_0} 0,$$

ebenso für $t_0 > t \in I$.

Es folgt $\lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t \neq t_0}} \dfrac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = f(t_0)$, d.h. $F'(t_0) = f(t_0)$.

(ii) $(G - F)'(t) = f(t) - f(t) = 0$ für $t \in I$, also ist $G - F$ konstant (Cor. 12.17); $G - F \equiv G(a) - F(a) = 0(a)$. □

13.15 <u>Bem.:</u> Für $f \in \mathcal{R}([a,b])$ nicht notwendig stetig liefert i.w. derselbe Beweis:

$$\underbrace{\lim_{\substack{t \nearrow t_0 \\ t \neq t_0}} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0}}_{\text{linksseitige Ableitung in } t_0} = \underbrace{\lim_{\substack{t \nearrow t_0 \\ t \neq t_0}} f(t)}_{\text{existiert nach 13.9}}, \quad t_0 \in (a,b],$$

entsprechend für $\lim\limits_{\substack{t \searrow t_0 \\ t \neq t_0}} \ldots$.

13.16 z.B.: (i) Sei $-1 \neq s \in \mathbb{R}$.

$$\int_a^b x^s \, dx = \frac{x^{s+1}}{s+1}\Big|_a^b = \frac{b^{s+1}}{s+1} - \frac{a^{s+1}}{s+1},$$

bzw. $\int x^s \, dx = \dfrac{x^{s+1}}{s+1} + C$.

Bew.: Sei $f(t) = t^s$, dann ist $G(t) := \dfrac{t^{s+1}}{s+1}$ Stammfunktion von f, denn $G'(t) = t^s$.

Also gilt $\int_a^b f(x) \, dx = G(b) - G(a) = G(x)\Big|_a^b$. □

(ii) Für $0<a<b$ gilt

$$\int_a^b x^{-1}\,dx = \ln x\Big|_a^b, \quad \text{denn } \frac{d}{dx}\ln x = x^{-1} \text{ für } x>0.$$

Für $a<b<0$ gilt

$$\int_a^b x^{-1}\,dx = \ln(-x)\Big|_a^b, \quad \text{denn } \frac{d}{dx}\ln(-x) = -(-x)^{-1} = x^{-1} \text{ für } x<0.$$

(Wir schreiben auch $\int x^{-1}\,dx = \ln|x| + C$ (Tiefbruch der Beziehungen, da wir nur über Intervalle integrieren können, die nicht die Null enthalten).

(iii) $\int \exp(x)\,dx = \exp x + C$

(iv) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$, $\int \cos x\,dx = \sin x + C$.

(v) $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$ (12.7(iii)).

(vi) $\int_a^b \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x\Big|_a^b$, $-\frac{\pi}{2} < a < b < \frac{\pi}{2}$ (12.5(ii)).

13.17 <u>Satz</u> (Substitutionsregel): Seien I, $[a,b] \subset \mathbb{R}$ Intervalle, $f: I \to \mathbb{R}$ stetig, $g: [a,b] \to I$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx.$$

Bew.: Sei $F: I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f, d.h.

$F'(t) = f(t)$, $t \in I$. Dann gilt

$$(F \circ g)'(t) = F'(g(t))\, g'(t) = f(g(t))\, g'(t),$$

also

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = F \circ g\,(x)\Big|_a^b = F(g(b)) - F(g(a))$$

$$= F(x)\Big|_{g(a)}^{g(b)} \overset{13.14}{=} \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\, dx. \qquad \square$$

13.18 z. B.: (i) $\displaystyle\int_a^b f(x+\lambda)\, dx = \int_{a+\lambda}^{b+\lambda} f(x)\, dx$

$g(x) := x+\lambda$

$g'(x) = 1$

(ii) $\displaystyle\int_a^b x f(x^2)\, dx = \frac{1}{2}\int_a^b g'(x) f(g(x))\, dx = \frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2} f(x)\, dx$

$g(x) = x^2$

$g'(x) = 2x$

(iii) $g: [a,b] \to \mathbb{R}^*$ stetig differenzierbar

$$\int_a^b \frac{g'(x)}{g(x)}\, dx = \ln(g(x))\Big|_a^b,$$

insbesondere

$$\int_a^b \tan x\, dx = -\int_a^b \frac{\cos' x}{\cos x}\, dx = -\ln(\cos x)\Big|_a^b, \quad [a,b] \subset \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right)$$

13.19 <u>Satz</u> (Partielle Integration): Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x) f'(x)\, dx.$$

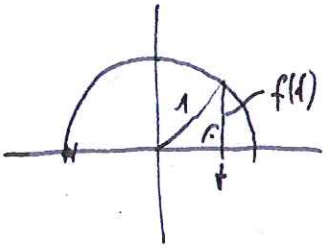
Bew.: Für $F := f \cdot g$ gilt

$$\int_a^b F'(x)\, dx = \int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx + \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx. \qquad \square$$

13.20 <u>Z.B.</u>: (i) $\displaystyle\int_a^b \ln x \cdot 1\, dx \underset{\substack{f(x)=\ln x \\ g'(x)=x}}{=} x \cdot \ln x\Big|_a^b - \int_a^b \frac{x}{x}\, dx = x(\ln x - 1)\Big|_a^b$

(ii) $\displaystyle\int_0^1 x^n (1-x)^m\, dx = \frac{n!\, m!}{(n+m+1)!}$ (Übg)

(iii) Betrachte $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(t) = \sqrt{1-t^2}$.



Für $b \in [0,1)$ gilt

$$\int_{-b}^b f(x)\, dx = \int_{-b}^b f(x) \cdot 1\, dx = f(x) \cdot x\Big|_{-b}^b - \int_{-b}^b x \cdot f'(x)\, dx$$

$$= \sqrt{1-x^2} \cdot x\Big|_{-b}^b - \int_{-b}^b x \cdot \frac{1}{2} \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

$$= 2\sqrt{1-b^2} \cdot b + \int_{-b}^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx - \int_{-b}^b \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$$

$$= 2\sqrt{1-b^2} \cdot b + \arcsin x\Big|_{-b}^b - \int_{-b}^b f(x)\, dx.$$

$$\Rightarrow 2 \int_{-b}^b f(x)\, dx = \underbrace{2\sqrt{1-b^2} \cdot b}_{\xrightarrow{b \to 1} 0} + \underbrace{\arcsin x\Big|_{-b}^b}_{\to \arcsin x\Big|_{-1}^1}$$

$$\xrightarrow{b \to 1} 2 \int_{-1}^1 f(x)\, dx = \arcsin x\Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi,$$ die Fläche des Einheitskreises.