12. Differentiation

"Wenn die Leute nicht glauben, dass Mathematik einfach ist, dann nur deshalb, weil sie nicht begreifen, wie kompliziert das Leben ist."

John von Neumann

12.1 Def.: Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $\bar{x} \in D$ ein Punkt so dass eine Folge in $D \setminus \{\bar{x}\}$ mit Limes $\bar{x}$ existiert. f heißt differenzierbar in $\bar{x}$, falls der Limes

$$f'(\bar{x}) := \lim_{\substack{x \to \bar{x} \\ x \in D \setminus \{\bar{x}\}}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} \in \mathbb{R}$$

[vgl. 9.24; $D \setminus \{\bar{x}\}$ ist Definitionsbereich von $x \mapsto \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}}$]

existiert. $f'(\bar{x})$ heißt dann Ableitung von f in $\bar{x}$; wir schreiben auch $\frac{df}{dx}(\bar{x})$ oder $Df(\bar{x})$.

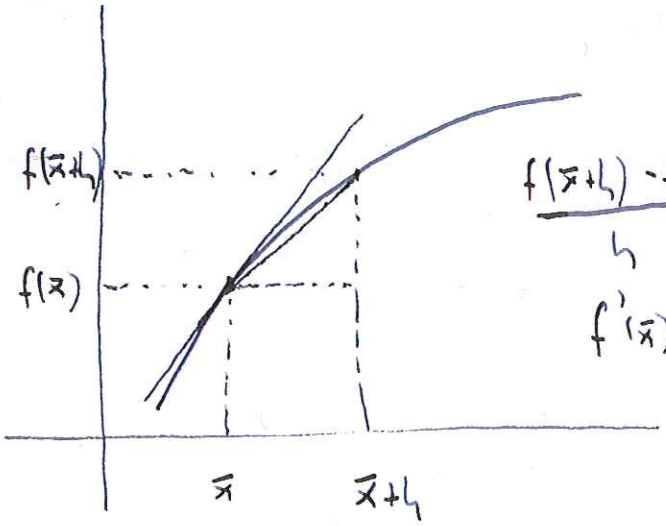
12.2 Bem.: (i) Falls $D \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall ist, so existiert für jedes $\bar{x} \in D$ eine Folge in $D \setminus \{\bar{x}\}$ mit Limes $\bar{x}$.

(ii) Falls f in $\bar{x}$ differenzierbar ist, so gilt

$$f'(\bar{x}) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ \bar{x}+h \in D \setminus \{\bar{x}\}}} \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x})}{h}.$$

[bzw. $h \in \tilde{D} := \{t \in \mathbb{R} \mid \bar{x} + t \in D \setminus \{\bar{x}\}\} = (D \setminus \{\bar{x}\}) - \bar{x}$]

(iii) geometrische Interpretation:



$\frac{f(\bar{x}+h)-f(\bar{x})}{h}$ Sekantensteigung

$f'(\bar{x})$ Tangentensteigung

(iv) $D, f, \bar{x}$ wie in 12.1.

f ist differenzierbar in $\bar{x}$ genau dann wenn $\varphi: D \to \mathbb{R}$ existiert mit

a) φ ist stetig in $\bar{x}$

b) $f(x) = f(\bar{x}) + (x-\bar{x})\varphi(x)$, $x \in D$.

Bew.: "$\Leftarrow$": $\varphi(x) = \frac{f(x)-f(\bar{x})}{x-\bar{x}}$, $x \in D \setminus \{\bar{x}\}$

φ stetig $\Rightarrow \varphi(\bar{x}) = \lim\limits_{\substack{x \to \bar{x} \\ x \in D}} \varphi(x) = \lim\limits_{\substack{x \to \bar{x} \\ x \in D\setminus\{\bar{x}\}}} \varphi(x) = \lim\limits_{\substack{x \to \bar{x} \\ x \in D\setminus\{\bar{x}\}}} \frac{f(x)-f(\bar{x})}{x-\bar{x}}$

$\left[\exists \text{ Folge } (x_n)_{\mathbb{N}} \subset D\setminus\{\bar{x}\} \text{ mit } x_n \to \bar{x}\right]$

"$\Rightarrow$": Definiere $\varphi: D \to \mathbb{R}$ durch $\varphi(x) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(\bar{x})}{x-\bar{x}}, & x \in D\setminus\{\bar{x}\} \\ f'(\bar{x}), & x = \bar{x} \end{cases}$,

dann gilt b). $\lim\limits_{\substack{x \to \bar{x} \\ x \in D\setminus\{\bar{x}\}}} \frac{f(x)-f(\bar{x})}{x-\bar{x}}$ existiert $\Rightarrow$ a)

Insbesondere gilt: f differenzierbar in $\bar{x}$ $\Rightarrow f$ stetig in $\bar{x}$.

12.3 z.B.: (i) $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar:

$n = 0$: $\dfrac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} = \dfrac{1-1}{x-\bar{x}} \equiv 0 \xrightarrow{x \to \bar{x}} 0$

$n \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} = \dfrac{x^n - \bar{x}^n}{x - \bar{x}} = x^{n-1} + x^{n-2}\bar{x} + \dots + x\bar{x}^{n-2} + \bar{x}^{n-1} \xrightarrow{x \to \bar{x}} n \cdot \bar{x}^{n-1}$
$= f'(\bar{x})$.

(ii) $f(x) = e^x$ ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar:

$$\frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x})}{h} = \frac{e^{\bar{x}+h} - e^{\bar{x}}}{h} = e^{\bar{x}} \underbrace{\frac{e^h - 1}{h} \xrightarrow[1]{h \to 0}}_{3.25(v)} e^{\bar{x}} \cdot 1 = e^{\bar{x}} = f'(\bar{x}).$$

(iii) $f(x) = x^{-1}$ ist auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar:

$$\frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x})}{h} = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{\bar{x}+h} - \frac{1}{\bar{x}}\right) = \frac{1}{h} \cdot \frac{\bar{x} - (\bar{x}+h)}{(\bar{x}+h)\,\bar{x}} = -\frac{1}{(\bar{x}+h)\bar{x}} \xrightarrow{h \to 0} -\frac{1}{\bar{x}^2}$$
$= f'(\bar{x})$.

(iv) $f(x) = \sin x$ ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar:

Es gilt

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{\sin h}{h} - 1 = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{\sin h - h}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{h + r_3(h) - h}{h} = 0, \qquad (*)$$

denn $\left|\dfrac{r_3(h)}{h}\right| \leq \dfrac{\frac{|h|^3}{3!}}{|h|} = \dfrac{|h|^2}{6}$ für $|h| \leq 4$ nach 11.7.

Es folgt $f'(\bar{x}) = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \dfrac{\sin(\bar{x}+h) - \sin(\bar{x})}{h} \overset{11.6}{=} \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} 2\,\dfrac{\cos\left(\frac{\bar{x}+h+\bar{x}}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\bar{x}+h-\bar{x}}{2}\right)}{h}$

$= \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \cos\left(\bar{x} + \frac{h}{2}\right) \cdot \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \dfrac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \overset{(*),\ \cos(\cdot)\ \text{stetig}}{=} \cos\bar{x} \cdot 1,$

also $\sin'(\bar{x}) = \cos\bar{x}$.

(v) analog: $\cos'(\bar{x}) = -\sin\bar{x}$

12.4 <u>Satz</u>: Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $\bar{x} \in D$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Dann sind $\lambda \cdot f + \mu \cdot g$, $f \cdot g$ differenzierbar in $\bar{x}$ und

$(\lambda \cdot f + \mu \cdot g)'(\bar{x}) = (\lambda \cdot f' + \mu \cdot g')(\bar{x})$, $(f \cdot g)'(\bar{x}) = (f' \cdot g + f \cdot g')(\bar{x})$.

Falls $g(x) \neq 0$ für $x \in D$, so ist $\frac{f}{g}$ differenzierbar in $\bar{x}$ und

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(\bar{x}) = \left(\frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}\right)(\bar{x}).$$

Bew.: $$\frac{(\lambda \cdot f + \mu \cdot g)(\bar{x}+h) - (\lambda \cdot f + \mu \cdot g)(\bar{x})}{h} = \lambda \cdot \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x})}{h} + \mu \cdot \frac{g(\bar{x}+h) - g(\bar{x})}{h} \xrightarrow{h \to 0} \lambda f'(\bar{x}) + \mu \cdot g'(\bar{x}).$$

$$\frac{(f \cdot g)(\bar{x}+h) - (f \cdot g)(\bar{x})}{h} = \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x})}{h} \cdot \underbrace{g(\bar{x}+h)}_{\xrightarrow{h \to 0} g(\bar{x})} + f(\bar{x}) \cdot \frac{g(\bar{x}+h) - g(\bar{x})}{h} \xrightarrow{h \to 0} f'(\bar{x}) g(\bar{x}) + f(\bar{x}) g'(\bar{x}).$$

[Weil beschränkt g ist stetig in $\bar{x}$ nach 12.2.(iv).]

$$\frac{\frac{f}{g}(\bar{x}+h) - \frac{f}{g}(\bar{x})}{h} = \frac{1}{g(\bar{x}+h) g(\bar{x})} \cdot \left(\frac{(f(\bar{x}+h) - f(\bar{x})) g(\bar{x})}{h} - \frac{f(\bar{x}) (g(\bar{x}+h) - g(\bar{x}))}{h} \right)$$

$$\xrightarrow{h \to 0} \frac{1}{g^2(\bar{x})} \left(f'(\bar{x}) g(\bar{x}) - f(\bar{x}) g'(\bar{x}) \right).$$

$\square$

12.5 z.B.: (i) $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

$$f'(x) \overset{12.4}{=} \frac{0 \cdot x^n - 1 \cdot n \cdot x^{n-1}}{(x^n)^2} = -n \cdot x^{n-1-2n} = -n \cdot x^{-n-1},$$

also $\frac{dx^k}{dx} = k \cdot x^{k-1}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

(ii) Sei $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ definiert durch $\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$.

$$\tan' x = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

12.6 Satz: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein echtes Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton; sei $g: f(I) \to I$ die Umkehrfunktion (vgl. 9.18). Falls f in $\bar{x} \in I$ differenzierbar ist mit $f'(\bar{x}) \neq 0$, so ist g in $f(\bar{x}) \in f(I)$ differenzierbar und es gilt

$$g'(f(\bar{x})) = \frac{1}{f'(\bar{x})}.$$

Falls also f in I differenzierbar ist mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$, so ist g in $f(I)$ differenzierbar und

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}, \quad y \in f(I).$$

Bew.: $f(I)$ ist ein echtes Intervall (9.18);

sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset f(I)\setminus\{f(\bar{x})\}$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} y_n = f(\bar{x}) =: \bar{y}$.

g ist stetig nach 9.18, also gilt

$$\bar{x} = g\circ f(\bar{x}) = g(\bar{y}) = g\left(\lim_{n\to\infty} y_n\right) = \lim_{n\to\infty} g(y_n)$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(y_n)-g(\bar{y})}{\underbrace{y_n-\bar{y}}_{\neq 0}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\underbrace{\frac{y_n-\bar{y}}{g(y_n)-g(\bar{y})}}_{\neq 0,\ \text{da } y_n\neq\bar{y} \text{ und } g \text{ bijektiv}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\underbrace{\frac{f(g(y_n))-f(g(\bar{y}))}{g(y_n)-g(\bar{y})}}_{\xrightarrow{n\to\infty} f'(g(\bar{y}))=f'(\bar{x})\neq 0}}$$

$$= \frac{1}{f'(\bar{x})}.$$

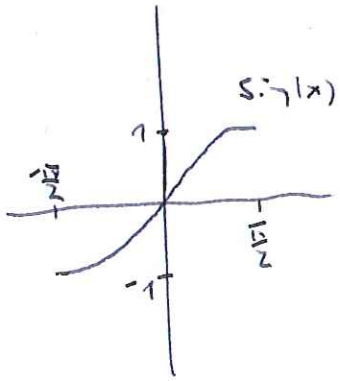
$$\Rightarrow \lim_{\substack{y\to f(\bar{x})\\ y\neq f(\bar{x})}} \frac{g(y)-g(f(\bar{x}))}{y-f(\bar{x})} = \frac{1}{f'(\bar{x})}. \qquad \square$$

12.7 z.B.: (i) $\ln'(y) = \dfrac{1}{\exp'(\ln y)} = \dfrac{1}{\exp(\ln y)} = \dfrac{1}{y}$, $y \in (0,\infty)$

(ii) Für $y \in (-1,1)$ gilt

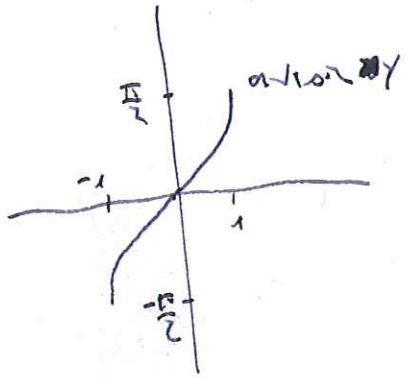
$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(y))}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\cos(\underbrace{\arcsin(y)}_{\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})})}}_{\in[0,1]}$$



$$\left[\begin{array}{l} \text{Für } x \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \text{ gilt} \\ \cos x = |\cos x| = \sqrt{\cos^2 x} \\ = \sqrt{1-\sin^2 x} \end{array}\right] \longleftarrow = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(y))}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$



(iii) Übrigens: $\arctan' y = \dfrac{1}{1+y^2}$,

wo $\arctan : (-\infty,\infty) \to (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

die Umkehrfunktion von $\tan(\cdot)$ ist.

[Übung.]

12.8 **Satz** (Kettenregel): Seien $f: D \to \mathbb{R}$, $g: E \to \mathbb{R}$ Funktionen, $f(D) \subset E$.

Falls f in $\bar{x} \in D$ und g in $f(\bar{x}) \in E$ differenzierbar sind, so ist $g \circ f: D \to \mathbb{R}$ in $\bar{x}$ differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(\bar{x}) = g'(f(\bar{x}))\, f'(\bar{x}).$$

$$\left[\; x \to y \to z \quad \rightsquigarrow \quad \text{"} \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \text{"} \;\right]$$

Bew.: Sei $\bar{y} := f(\bar{x})$.

Definiere $\varphi: E \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi(y) := \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(\bar{y})}{y - \bar{y}}, & \text{falls } y \neq \bar{y} \\ g'(\bar{y}), & \text{falls } y = \bar{y}, \end{cases}$$

dann ist φ stetig in $\bar{y}$ und es gilt

$$g(y) - g(\bar{y}) = \varphi(y)(y - \bar{y}), \quad y \in E; \quad \text{vgl. 12.2(iv)}.$$

Wir erhalten

$$\frac{g \circ f(x) - g \circ f(\bar{x})}{x - \bar{x}} = \frac{g(f(x)) - g(\overset{f(\bar{x})}{\bar{y}})}{x - \bar{x}} = \varphi(f(x)) \cdot \frac{f(x) - \overset{f(\bar{x})}{\bar{y}}}{x - \bar{x}}$$

$$\xrightarrow[x \neq \bar{x}]{x \to \bar{x}} \varphi(f(\bar{x})) \cdot \lim_{\substack{x \to \bar{x} \\ x \neq \bar{x}}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} = \varphi(f(\bar{x})) \cdot f'(\bar{x}) = g'(f(\bar{x}))f'(\bar{x})$$

φ stetig in $f(\bar{x})$,
f stetig in $\bar{x}$

$\square$

12.9 z.B.: (i) $a \in \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^a = \exp(a \ln x)$.

$$f'(x) = \frac{d \exp}{dx}(a \ln x) \cdot \frac{d(a \ln x)}{dx} = \exp(a \ln x) \cdot \frac{a}{x} = a \cdot x^{a-1}.$$

(ii) $$\frac{d(e^{f(x)})}{dx} = e^{f(x)} \cdot f'(x).$$

12.10 Def.: Sei $f: D \to \mathbb{R}$ auf D differenzierbar, dann ist $f': D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

Falls f' auf D differenzierbar ist, so heißt f zweimal differenzierbar auf D und wir schreiben

$$f''(x) := (f')'(x).$$

Wir schreiben auch $D^2 f(x)$ bzw. $\frac{d^2 f}{dx^2}(x)$ bzw. $f^{(2)}(x)$ bzw. $\ddot{f}(x)$.

Induktiv definieren wir:

f heißt k-mal differenzierbar auf D, falls f $(k-1)$-mal differenzierbar ist und $f^{(k-1)}$ differenzierbar ist; wir schreiben $f^{(k)}(x) := (f^{(k-1)})'$ bzw. $D^k f(x)$ bzw. $\frac{d^k f}{dx^k}(x)$.

f heißt ∞-oft differenzierbar (oder glatt), falls f k-mal differenzierbar ist für jedes $k \in \mathbb{N}$.

12.11 z.B.: Polynome, e^x, $\sin x$, $\cos x$, e^{-x^2}, ... sind glatt.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$$ ist 1-mal, aber nicht 2-mal differenzierbar, denn $f'(x) = 2|x|$.

[Warum ist $|x|$ nicht differenzierbar?]

12.12 Def.: $f: D \to \mathbb{R}$ hat in $\bar{x} \in D$ ein lokales Maximum (Minimum), falls ein $\varepsilon > 0$ existiert so dass gilt

$$f(x) \leq f(\bar{x}) \quad \text{für alle } x \in D \cap (\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon).$$

$$\left(f(x) \geq f(\bar{x}) \right)$$

Das Extremum heißt isoliert, falls man $\varepsilon > 0$ so wählen kann, dass $f(x) < f(\bar{x})$ (bzw. $f(x) > f(\bar{x})$) für alle $\bar{x} \neq x \in D \cap (\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon)$.

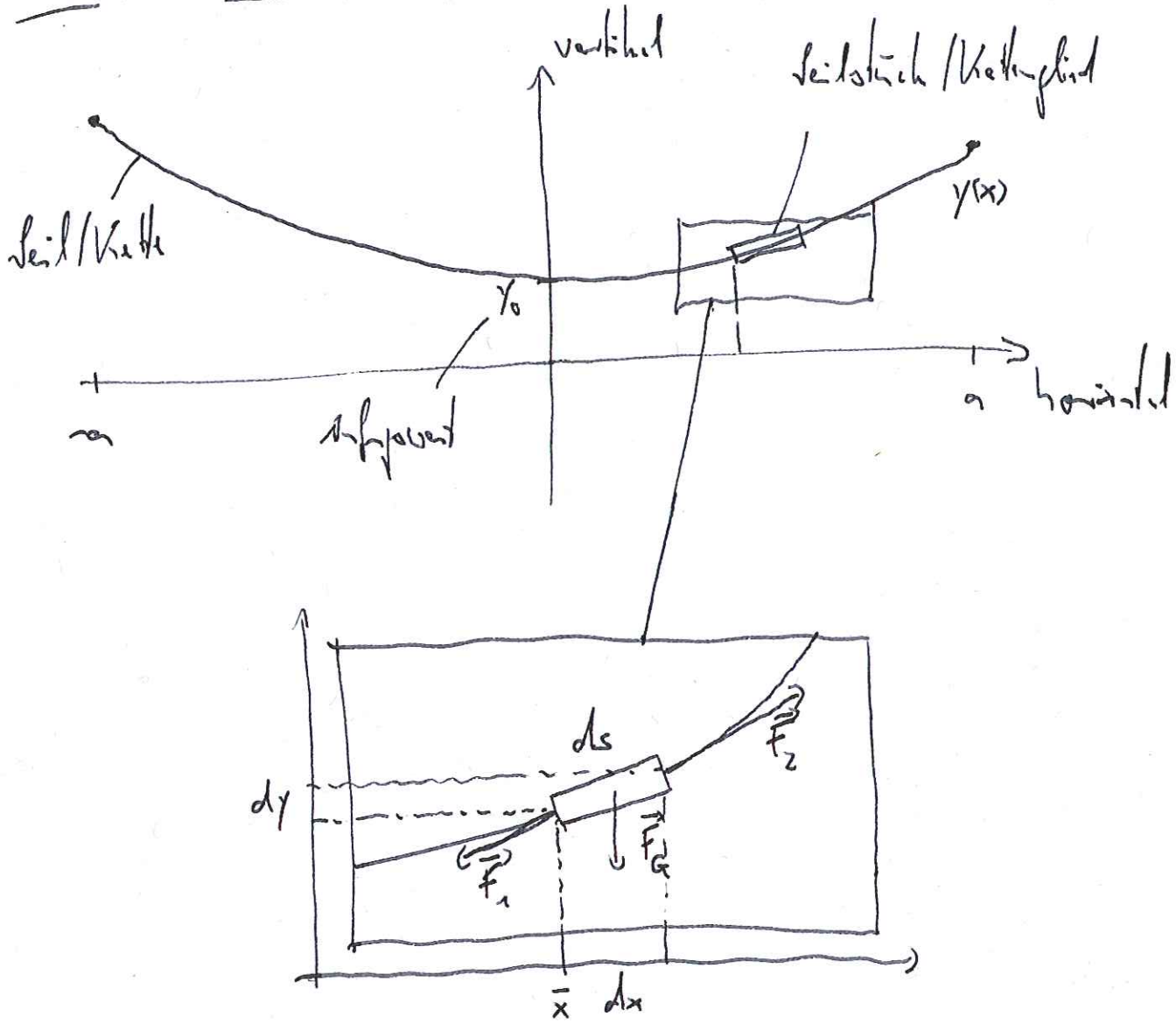
12.13 Satz: $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ besitze in $\bar{x} \in (a,b)$ ein lokales Extremum und sei in $\bar{x}$ differenzierbar. Dann gilt $f'(\bar{x}) = 0$.

Bew.: O.E.d.A. besitze f in $\bar{x}$ ein lokales Maximum.
Dann existiert $\varepsilon > 0$ so dass $f(x) \leq f(\bar{x})$ für alle $x \in (\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon)$.
Es folgt

$$0 \geq \lim_{\substack{x \searrow \bar{x} \\ x \neq \bar{x}}} \underbrace{\frac{f(x)-f(\bar{x})}{x-\bar{x}}}_{\leq 0} \overset{\text{[warum?]}}{=} \underbrace{\lim_{\substack{x \to \bar{x} \\ x \neq \bar{x}}} \frac{f(x)-f(\bar{x})}{x-\bar{x}}}_{= f'(\bar{x})} \overset{\text{[warum?]}}{=} \lim_{\substack{x \nearrow \bar{x} \\ x \neq \bar{x}}} \underbrace{\frac{f(x)-f(\bar{x})}{x-\bar{x}}}_{\geq 0} \geq 0 .$$

12.14 Bem.: $f'(\bar{x}) = 0$ ist notwendig, aber nicht hinreichend für ein lokales Extremum in $\bar{x}$. $f(x) = x^3$, dann $f'(0) = 0$, aber f hat kein lokales Extremum.

12.19 z.B.: Die Kettenlinie



Auf das Seilstück wirken die Kräfte $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_G$; das Seilstück befindet sich in Ruhe, wird also nicht beschleunigt, d.h. die Kräfte sind im Gleichgewicht:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_G + \vec{F}_2 = 0.$$

Für die Gravitationskraft gilt $\vec{F}_G = \begin{pmatrix} F_{G,h} \\ F_{G,v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \cdot \rho \cdot ds \end{pmatrix}$,

wo $g = 9{,}81 \frac{m}{s^2}$ die Erdbeschleunigung ist,

$\rho = \frac{\text{Masse}}{\text{Länge}}$ des Seils,

ds = Länge des Seilstücks.

Es bezeichne $\vec{F}(x) = \begin{pmatrix} F_h(x) \\ F_v(x) \end{pmatrix}$ die an der Stelle x nach rechts ziehende Kraft; dann haben wir

$$-\vec{F}_1 = \vec{F}(\bar{x}), \quad \vec{F}_2 = \vec{F}(\bar{x} + dx),$$

$$d\vec{F}(\bar{x}) := \vec{F}(\bar{x} + dx) - \vec{F}(\bar{x}) = \vec{F}_2 + \vec{F}_1 = -\vec{F}_G,$$

in Koordinaten

$$\begin{pmatrix} dF_h(\bar{x}) \\ dF_v(\bar{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g \cdot \rho \cdot ds \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow F_h$ ist konstant.

12.15 <u>Satz</u> von Rolle: Sei $a<b$ und $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig mit $f(a)=f(b)$. Sei f auf (a,b) differenzierbar.
Dann existiert $\bar{x}\in(a,b)$ mit $f'(\bar{x})=0$.

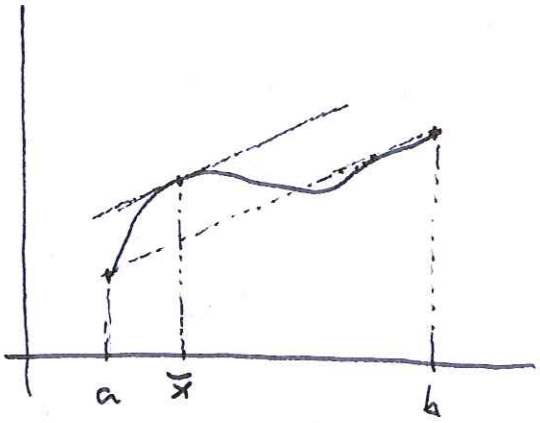
Bew.: Trivial, falls f konstant ist.
Andernfalls existiert $x_0\in(a,b)$ mit $f(x_0)>f(a)=f(b)$ oder $f(x_0)<f(a)=f(b)$. Dann ist das Maximum von f größer als $f(x_0)$ und das Minimum ist kleiner als $f(x_0)$; beide existieren nach 9.12.
O.E. werde das Maximum in $\bar{x}$ angenommen und es gelte $f(\bar{x})\geq f(x_0)>f(a)=f(b)$.
$\Rightarrow \bar{x}\in(a,b)$ und f hat in $\bar{x}\in(a,b)$ ein lokales Extremum.
Nach Satz 12.13 ist $f'(\bar{x})=0$. □

12.16 <u>Mittelwertsatz</u>: Sei $a<b$ und $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Sei f differenzierbar auf (a,b). Dann existiert $\bar{x}\in(a,b)$ mit

$$f'(\bar{x}) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Bew.: Definiere $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ durch $F(x):=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, dann ist $F(a)=f(a)=F(b)$, F ist stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b). Nach 12.15 existiert $\bar{x}\in(a,b)$ mit

$$0=F'(\bar{x})=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$ □



12.17 <u>Cor.:</u> Sei $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b) mit $f'(\bar{x}) = 0$ für alle $\bar{x} \in (a,b)$. Dann ist f konstant.

Bew.: Für alle $a \leq x < y \leq b$ gilt $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} = 0$, also $f(y) = f(x)$ und f ist konstant auf $[a,b]$.

~~f stetig $\Rightarrow$ f ist konstant auf [a,b]~~ $\square$

12.18 <u>Cor.:</u> Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$f'(x) = \lambda \cdot f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt $f(x) = f(0) \cdot e^{\lambda x}$, $x \in \mathbb{R}$.

D.h., die Differentialgleichung $f' = \lambda \cdot f$ besitzt zu jedem vorgegebenen Anfangswert $f(0)$ die eindeutig bestimmte Lösung $f(0) \cdot e^{\lambda x}$.

Bew.: Setze $F(x) := f(x)\, e^{-\lambda x}$, dann ist F differenzierbar mit $F'(x) = f'(x) e^{-\lambda x} + f(x)(-\lambda \cdot e^{-\lambda x}) = 0$, $x \in \mathbb{R}$. Nach 12.17 ist daher F konstant mit $f(x)\, e^{-\lambda x} = F(x) = F(0) = f(0)$, $x \in \mathbb{R}$. $\square$

In vertikaler Richtung erhalten wir:

$$dF_v(\bar{x}) = g \cdot \varrho \cdot ds = g \cdot \varrho \cdot \sqrt{dx^2 + dy^2} = g \cdot \varrho \cdot dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

also

$$\frac{dF_v(\bar{x})}{dx} = g \cdot \varrho \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Das Seil ist biegsam, also muss $\vec{F}(\bar{x})$ in Richtung des Seilstücks zeigen, d.h.

$$\frac{F_v(\bar{x})}{F_h(\bar{x})} = \frac{dy}{dx}.$$

Der Grenzübergang $ds \to 0$ liefert

$$F_v'(\bar{x}) = g \cdot \varrho \cdot \sqrt{1 + y'(\bar{x})^2}$$

und

$$F_v(\bar{x}) = F_h(\bar{x}) \cdot y'(\bar{x}), \qquad \bar{x} \in [-a, a].$$

Setze $\omega := \frac{g \cdot \varrho}{F_h(\bar{x})}$ (konstant).

Wir erhalten die Differentialgleichung für y:

$$\boxed{y''(x) = \omega \cdot \sqrt{1 + y'(x)^2}}$$

Beh.: $y(x) := \frac{1}{\omega} \cdot \cosh(\omega \cdot x) + y_0 - \frac{1}{\omega}$

ist eine Lösung mit Anfangswert $y(0) = y_0$.

Bew.: $y(x) = \frac{1}{2\omega} \cdot \left(e^{\omega x} + e^{-\omega x}\right) + y_0 - \frac{1}{\omega}$,

$$y'(x) = \frac{1}{2}\left(e^{\omega x} - e^{-\omega x}\right),$$

$$y''(x) = \frac{\omega}{2}\left(e^{\omega x} + e^{-\omega x}\right) = \omega \cdot \cosh(\omega \cdot x)$$

$$\sqrt{1 + y'(x)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(e^{2\omega x} - 2 \cdot e^{0} + e^{-2\omega x}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}\left(e^{2\omega x} + 2e^{0} + e^{-2\omega x}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{\omega x} + e^{-\omega x}\right)$$

$$= \cosh(\omega \cdot x),$$

d.h. $y''(x) = \omega \cdot \cosh(\omega \cdot x) = \omega\sqrt{1 + y'(x)^2}$. $\square$

Man kann zeigen: Die Lösung ist durch den Anfangswert eindeutig bestimmt.

12.21 <u>Satz</u>: Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b). Falls für alle $x\in(a,b)$ gilt $f'(x)\geq 0$ (bzw. $f'(x)>0$, $f'(x)\leq 0$, $f'(x)<0$), so ist f auf $[a,b]$ m.w. (bzw. s.m.w., m.f., s.m.f.).

Bew.: Wir beweisen nur den Fall $f'(x)>0$, $x\in(a,b)$.

Angenommen, f sei nicht s.m.w.

Dann existieren $a\leq x_1<x_2\leq b$ mit $f(x_1)\geq f(x_2)$.

$$\overset{\text{MWS}}{\Rightarrow}\ \exists\,\bar{x}\in(x_1,x_2):\ f'(\bar{x})=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leq 0.\ \lightning \qquad \square$$

12.22 <u>Satz</u>: Sei $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ differenzierbar.

Sei f zweimal differenzierbar in $\bar{x}\in(a,b)$ und es gelte

$$f'(\bar{x})=0 \text{ und } f''(\bar{x})>0 \quad (\text{bzw. } f''(\bar{x})<0).$$

Dann besitzt f in $\bar{x}$ ein isoliertes lokales Minimum (bzw. Maximum).

Bew.:
$$0<f''(x)=\lim_{x\to\bar{x}}\frac{f'(x)-f'(\bar{x})}{x-\bar{x}}$$

$\Rightarrow$ es existiert $\delta>0$ mit $\dfrac{f'(x)-f'(\bar{x})}{x-\bar{x}}>0$ für alle $x\in(\bar{x}-\delta,\bar{x}+\delta)$.

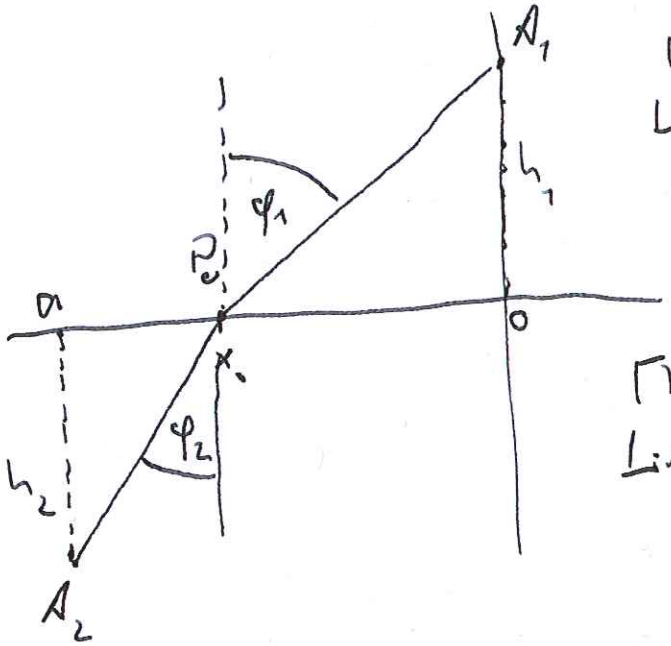
Wegen $f'(\bar{x})=0$ folgt $f'(x)<0$ falls $x\in(\bar{x}-\delta,\bar{x})$,

$f'(x)>0$ falls $x\in(\bar{x},\bar{x}+\delta)$.

$\overset{12.21}{\Rightarrow}$ f s.m.f. in $[\bar{x}-\delta,\bar{x}]$, f s.m.w. in $[\bar{x},\bar{x}+\delta]$.

$\Rightarrow$ f hat in $\bar{x}$ ein isoliertes lokales Minimum. (Maximum analog.) $\square$

12.23 z.B.:



Medium 1
Lichtgeschwindigkeit v_1

Medium 2
Lichtgeschwindigkeit v_2

Fermatsches Prinzip: Licht nimmt den schnellsten Weg (von A_1 nach A_2).

$\rightsquigarrow$ In homogenen Medien breitet sich Licht geradlinig aus.

gesucht: P_0.

Zeit für den Weg von A_1 nach A_2 durch $P=(x,0)$:

$$t(x) = \frac{\sqrt{x^2+h_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x-a)^2+h_2^2}}{v_2}$$

t ist differenzierbar mit

$$t'(x) = 2x\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{v_1}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+h_1^2}} + 2(x-a)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{v_2}\cdot\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+h_2^2}}$$

$$= \frac{x}{v_1\sqrt{x^2+h_1^2}} + \frac{x-a}{v_2\sqrt{(x-a)^2+h_2^2}}.$$

$t'(a) < 0$, $t'(0) > 0 \Rightarrow t'$ besitzt Nullstelle x_0 in $(a,0)$.

$$f''(x) = \left(\frac{1 \cdot \sqrt{x^2+h_1^2} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+h_1^2}}}{v_1 \left(x^2+h_1^2\right)} + \text{———} \right)$$

$$= \frac{h_1^2}{v_1 \left(x^2+h_1^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{h_2^2}{v_2 \left((x-a)^2+h_2^2\right)^{\frac{3}{2}}} > 0$$

12.22,
12.21
$\Rightarrow$ f' ist s.m.u. und x_0 ist einzige Nullstelle von f';

f nimmt in x_0 den (eindeutig bestimmten) Minimum an.

Aus $f'(x_0) = 0$ folgt

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\frac{-x_0}{\sqrt{x_0^2+h_1^2}}}{\frac{x_0-a}{\sqrt{(x_0-a)^2+h_2^2}}} = \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2}$$

(Snellius'sche Brechungsgesetz).

12.24 <u>Satz</u> (l'Hospitalsche Regel, bewiesen von Joh. Bernoulli):

Seien $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $g'(x) \neq 0$ für $x \in (a,b)$.

Es gelte

a) $\lim\limits_{x \searrow a} f(x) = \lim\limits_{x \searrow a} g(x) = 0$

oder

b) $\lim\limits_{x \searrow a} f(x) = \lim\limits_{x \searrow a} g(x) = \infty$.

Falls $\lim\limits_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, so auch $\lim\limits_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$

und $\lim\limits_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Entsprechend für $\lim\limits_{x \nearrow b}$ und für $a = -\infty$ bzw. $b = +\infty$.

Bew.: a): Wir betrachten f, g als stetige Funktionen auf $[a,b)$ mit $f(a) = g(a) = 0$.

Betrachte $\bar{y} \in (a,b)$ und definiere $F : [a, \bar{y}] \to \mathbb{R}$ durch

$$F(x) := f(x) - \frac{f(\bar{y}) - f(a)}{g(\bar{y}) - g(a)} \left(g(x) - g(a)\right).$$

Dann ist $F(\bar{y}) = F(a)$; F ist stetig auf $[a, \bar{y}]$ und differenzierbar auf $(a, \bar{y})$.

Satz v. Rolle

$$\Rightarrow \quad \exists\, \xi \in (a, \bar{\gamma}): \quad 0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(\bar{\gamma}) - f(a)}{g(\bar{\gamma}) - g(a)} \cdot g'(\xi),$$

also

$$\underbrace{\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(\bar{\gamma}) - f(a)}{g(\bar{\gamma}) - g(a)}}_{\text{(Verallgemeinerter MWS)}} = \frac{f(\bar{\gamma})}{g(\bar{\gamma})}.$$

Falls nun $(\bar{\gamma}_n)_{\mathbb{N}} \subset (a,b)$ mit $\bar{\gamma}_n \xrightarrow{n\to\infty} a$,

so erhält man $(\xi_n)_{\mathbb{N}}$ mit $\xi_n \in (a, \bar{\gamma}_n)$ und

$$\frac{f(\bar{\gamma}_n)}{g(\bar{\gamma}_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} \xrightarrow{n\to\infty} \lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

b) Durch Kehrwertbildung folgt $f'(x) \neq 0$ und $\lim_{x \searrow a} \frac{g'(x)}{f'(x)}$ existiert.
Somit alles behauptet. □

12.25 z.B. (i) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\alpha \cdot e^{\alpha x}}{1} = \infty \quad (\alpha > 0).$

$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{e^{\frac{\alpha}{\beta} x}}{x}\right)^\beta = \infty \quad (\alpha, \beta > 0).$

$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{\alpha x}}{p(x)} = \infty \quad (\alpha > 0,\ p \text{ ein Polynom}).$

(ii) $\lim_{x\searrow 0} x \ln x = \lim_{x\searrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0.$

$\lim_{x\searrow 0} x^x = \lim_{x\searrow 0} \exp(x \ln x) = \exp\left(\lim_{x\searrow 0} x \ln x\right) = e^0 = 1.$