10. Die komplexen Zahlen

IMAGINARY NUMBERS ?!

YOU KNOW, ELEVENTEEN, THIRTY-TWELVE AND ALL THOSE-
IT'S A LITTLE CONFUSING AT FIRST.

CALVIN & HOBBES

10.1 (i) Wir definieren

$$\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

mit Operationen $+, \cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

und

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2).$$

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ bildet einen Körper mit

$0_{\mathbb{C}} = (0,0)$, $1_{\mathbb{C}} = (1,0)$ und $(x,y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right)$ falls $(x,y) \neq (0,0)$.

(ii) Die Abbildung $\mathbb{R} \to \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$, $x \mapsto (x,0)$ ist ein Isomorphismus auf einen Unterkörper. Mit dieser Identifikation und $i := (0,1) \in \mathbb{C}$ schreiben wir $(x,y) = x + i \cdot y$, $x, y \in \mathbb{R}$.

(iii) Es gilt $i^2 = -1$.

(iv) Wir definieren Real- und Imaginärteil durch

$$\mathrm{Re}(x+i\cdot y) := x, \quad \mathrm{Im}(x+i\cdot y) = y \in \mathbb{R}.$$

Es gilt $z = z' \iff \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z')$ und $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z')$.

Außerdem gilt $z = \mathrm{Re}(z) + i\cdot \mathrm{Im}(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(v) Für $z = x + i\cdot y \in \mathbb{C}$ definieren wir $\bar{z} := x - i\cdot y$,

d.h. $\mathrm{Re}(z) - i\cdot \mathrm{Im}(z)$.

Es gilt $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$, $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2}(z-\bar{z})$,

$\bar{\bar{z}} = z$, $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.

(vi) Wir definieren $|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ durch $|z| := \sqrt{z\bar{z}}$

(für $z = x+i\cdot y$ gilt $z\bar{z} = x^2 + y^2 \geq 0$).

Für $z \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ stimmt $|z|$ mit der früheren Def. überein.

Es gilt

a) $|z| \geq 0$; $\quad z = 0 \iff |z| = 0$

b) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

c) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1|\,|z_2|$.

D.h., mit $|\cdot|$ ist $\mathbb{C}$ ein <u>bewerteter</u> Körper.

Weiter gilt $|\mathrm{Re}(z)|, |\mathrm{Im}(z)| \leq |z| \leq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$.

Beweis Übung.

10.2 <u>Def.</u>: Eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ konvergiert gegen $z \in \mathbb{C}$, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |z_n - z| < \varepsilon.$$

Wir schreiben $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$.

10.3 <u>Prop.</u>: $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ konvergiert $\Leftrightarrow$ $(\mathrm{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\mathrm{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren.

In diesem Fall gilt $\mathrm{Re}(\lim\limits_{n\to\infty} z_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Re}(z_n)$,

$\mathrm{Im}(\lim\limits_{n\to\infty} z_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Im}(z_n)$.

Bew.: Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ eine Folge, $z_n = x_n + i \cdot y_n$, $n \in \mathbb{N}$.

"$\Rightarrow$": Sei $\lim\limits_{n\to\infty} z_n =: z = x + i \cdot y$.

Sei $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ so dass $|z_n - z| < \varepsilon$ falls $n \geq N$.

Dann gilt $|x_n - x| = |\mathrm{Re}(z_n - z)| \leq |z_n - z| < \varepsilon$,

$|y_n - y| = |\mathrm{Im}\, z_n - z| \leq |z_n - z| < \varepsilon$, falls $n \geq N$.

Es folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Re}(z_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x = \mathrm{Re}(\lim\limits_{n\to\infty} z_n)$, ebenso für $\mathrm{Im}(\cdot)$.

"$\Leftarrow$": Sei $\lim\limits_{n\to\infty} x_n =: x$, $\lim y_n =: y$; setze $z := x + i \cdot y$.

Sei $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ so dass $|x_n - x|, |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$ falls $n \geq N$.

Dann gilt

$|z_n - z| = |(x_n - x) + i \cdot (y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$,

falls $n \geq N$.

Also $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$. $\square$

10.4 <u>Cor.:</u> Seien $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ Folgen mit $\lim_{n\to\infty} w_n = w$, $\lim_{n\to\infty} z_n = z$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Dann konvergieren $(\lambda \cdot w_n + \mu \cdot z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\overline{w_n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_n w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und es gilt $\lim_{n\in\mathbb{N}}(\lambda \cdot w_n + \mu \cdot z_n) = \lambda \cdot w + \mu \cdot z$, $\lim_{n\to\infty} \overline{w_n} = \overline{w}$, $\lim_{n\to\infty} z_n w_n = zw$.
Falls $w \neq 0$, so gilt $\lim_{n\to\infty}(z_n \cdot w_n^{-1}) = z \cdot w^{-1}$.
$[\exists N : \forall n \geq N : w_n \neq 0]$

Bew.: $\overline{w_n} = \underbrace{\mathrm{Re}\, w_n}_{\xrightarrow{n\to\infty} \mathrm{Re}\, w} + i \cdot (\underbrace{-\mathrm{Im}\, w_n}_{\xrightarrow{n\to\infty} -\mathrm{Im}\, w})$

$\overset{10.3}{\Rightarrow} \overline{w_n} \xrightarrow{n\to\infty} \mathrm{Re}\, w + i \cdot (-\mathrm{Im}\, w) = \overline{w}$.

Rest Übung. $\square$

10.5 <u>Def.:</u> $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ heißt Cauchyfolge, falls gilt:

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq N : |z_m - z_n| < \varepsilon$.

10.6 <u>Prop.:</u> $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ ist Cauchy $\Leftrightarrow$ $(\mathrm{Re}\, z_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\mathrm{Im}\, z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ sind Cauchy.

Bew.: Analog zu 10.3 (hierzu zunächst: $|w| \leq |\mathrm{Re}\, w| + |\mathrm{Im}\, w| \leq |w| + |w|$) $\square$

10.7 **Satz:** $\mathbb{C}$ ist vollständig, d.h. jede Cauchyfolge konvergiert.

Bew.: $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ Cauchy $\overset{10.6}{\Rightarrow}$ $(\mathrm{Re}\, z_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\mathrm{Im}\, z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ Cauchy

$\overset{\mathbb{R}\text{ vollständig}}{\Rightarrow}$ $(\mathrm{Re}\, z_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\mathrm{Im}\, z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren in $\mathbb{R}$

$\overset{10.3}{\Rightarrow}$ $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. $\square$

10.8 **Def.:** Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ eine Folge.

a) Wir schreiben $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ für die Folge $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen $s_k := \sum_{n=0}^{k} z_n$; im Falle der Konvergenz schreiben wir auch $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ für den Limes.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ konvergiert absolut, falls $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ konvergiert.

10.9 **Bem.:** absolute Konvergenz $\Rightarrow$ Konvergenz

Bew.: Wie 7.10 (einschließlich Cauchykriterium).

10.10 **Satz** (Majorantenkriterium): Seien $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ Folgen mit $|z_n| \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Falls $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert, so ~~auch~~ konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ absolut und es gilt $\left|\sum_{n=0}^{\infty} z_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |z_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} c_n$.

Bew.: Wie 7.11. $\square$

10.11 **Satz** (Quotientenkriterium): Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ eine Folge.
Falls $0 < \Theta < 1$ existiert mit $\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \leq \Theta$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
so konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ absolut.

Bew.: Wie 7.13 □

10.12 **Satz**: Für jedes $z \in \mathbb{C}$ konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ absolut.
Den Limes bezeichnen wir mit $\exp(z)$.
Falls $N \in \mathbb{N}$ und $|z| \leq \frac{N}{2} + 1$, so gilt
$$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right| \leq 2 \cdot \frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!}.$$
Außerdem gilt $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$.

Bew.: Konvergenz und Restgliedabschätzung: wie 8.1.
Konjugation: benutze $\sum_{n=0}^{k} \frac{(\bar{z})^n}{n!} = \overline{\left(\sum_{n=0}^{k} \frac{z^n}{n!}\right)}$ und Cor 10.4. □

10.13 **Satz**: Für $w, z \in \mathbb{C}$ gilt $\exp(w+z) = \exp(w)\exp(z)$.

Bew.: Wie 8.2 (einschließlich Cauchyprodukt). □

10.14 **Def.**: $D \subset \mathbb{C}$, $f: D \to \mathbb{C}$ eine Funktion, $z_0 \in D$.
f heißt stetig in z_0, falls gilt:
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \forall z \in D: (|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon)$.
f heißt stetig, falls f in jedem Punkt von D stetig ist.

10.15 **Bem.**: Stetigkeit in z_0 lässt sich wie im Reellen auch durch Folgen charakterisieren.
[ÜB 7]

10.16 <u>Satz</u>: $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ ist stetig.

Bew.: $\exp(z)\exp(-z) = \exp(0) = 1 \Rightarrow \exp(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$.

Wähle $\delta := \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2|\exp(z_0)|}\right\}$.

Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < \delta$ erhalten wir

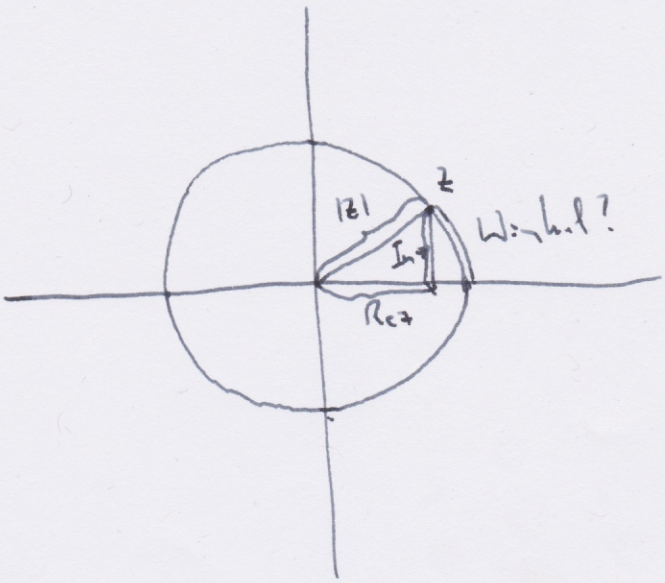
$$|\exp(z) - \exp(z_0)| = |\exp(z_0)|\,|\exp(z - z_0) - 1|$$

$$\leq |\exp(z_0)| \cdot \left|\sum_{n=0+1}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{n!}\right|$$

$$\leq |\exp(z_0)| \cdot 2 \cdot \frac{|z-z_0|^{0+1}}{(0+1)!}$$

$$< \varepsilon.$$

10.17 geometrische Interpretation:



Falls $z = e^{ix} := \exp(ix)$, so $|e^{ix}| = \sqrt{e^{ix} e^{-ix}} = \sqrt{e^0} = 1$.