7. Reihen

„Soweit ich das Fliegen perfektioniert habe, habe ich einen Plan für eine Dampfmaschine."

Ada Lovelace

7.1 Def.: Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Folge.

Wir definieren die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$, $n \in \mathbb{N}$, und schreiben $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ für $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Falls $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, bezeichnen wir oft auch den Limes $\lim_{n\to\infty} s_n$ mit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

7.2 Beispiel (geometrische Reihe):

Sei $|x| < 1$ und $a_k := x^k$. Dann gilt

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} x^k \overset{1.5(ii)}{=} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \xrightarrow[\text{[warum?]}]{n\to\infty} \frac{1}{1-x},$$

also $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$.

7.3 <u>Satz</u> (Cauchysches Konvergenzkriterium):

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Folge.

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq m \geq N : \left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon.$$

Bew.: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert $\Leftrightarrow (s_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy [mit $s_\ell = \sum_{k=0}^{\ell} a_k$]

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq m \geq N : \underbrace{|s_n - s_{m-1}|}_{= \left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right|} < \varepsilon.$$

□

7.4 <u>Bem.</u>: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert $\Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Bew.: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n| = \left|\sum_{k=n}^{n} a_k\right| < \varepsilon.$ □

7.5 <u>Satz</u>: Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ eine Folge.

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn sie beschränkt ist.

Bew.: Es gilt $s_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} a_k = s_n + \overbrace{a_{n+1}}^{\geq 0} \geq s_n$, also ist $(s_n)_{\mathbb{N}}$ monoton wachsend.

$(s_n)_{\mathbb{N}}$ beschränkt $\underset{\text{klar}}{\overset{6.6}{\Leftrightarrow}}$ $(s_n)_{\mathbb{N}}$ konvergiert. □

7.6 <u>Beispiel</u> (Harmonische Reihe):

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert:

$$s_{2^n} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} = \underbrace{\overset{n=0}{(1)} + \overset{1}{\left(\tfrac{1}{2}\right)} + \overset{2}{\left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}\right)} + \overset{3}{\left(\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8}\right)} + \cdots + \overset{n}{\left(\sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} \tfrac{1}{k}\right)}}_{n+1 \text{ Summanden}} \geq \frac{n+1}{2},$$

$$\geq \frac{1}{2} \quad \geq \frac{1}{2} \quad \geq \frac{1}{2} \quad \geq \frac{1}{2} \quad \geq \frac{1}{2}$$

d.h. $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht beschränkt.

7.7 <u>Satz</u> (Leibnizkriterium): Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ monoton fallend mit $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Dann konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$.

Bew.: Für $n \in \mathbb{N}$ setze $s_n := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$, dann gilt:

$$s_{2n+2} - s_{2n} = -a_{2n+1} + a_{2n+2} \leq 0,$$

$$s_{2n+3} - s_{2n+1} = a_{2n+2} - a_{2n+3} \geq 0,$$

$$s_{2n+1} - s_{2n} = -a_{2n+1} \leq 0.$$

Es folgt:

$(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend

$(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend.

$s_1 \leq s_{2n+1} \leq s_{2n} \leq s_0 \Rightarrow (s_{2n})_{\mathbb{N}}, (s_{2n+1})_{\mathbb{N}}$ sind beschränkt.

6.6 $\Rightarrow (s_{2n})_{\mathbb{N}}, (s_{2n+1})_{\mathbb{N}}$ konvergieren:

$$S := \lim_{n\to\infty} s_{2n}, \quad S' := \lim_{n\to\infty} s_{2n+1}.$$

Es gilt $S - S' = \lim_{n\to\infty} (s_{2n} - s_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0.$

Noch zu zeigen: $\lim_{n\to\infty} s_n = S.$

Sei $\varepsilon > 0$. $\exists N, N' \in \mathbb{N}$ mit

$|s_{2n} - S| < \varepsilon$ falls $n \geq N$ und $|s_{2n+1} - S'| < \varepsilon$ falls $n \geq N'$.

Setze $\overline{N} := \max\{2N, 2N'+1\}$, dann gilt

$|s_n - S| < \varepsilon$ falls $n \geq \overline{N}$. $\square$

7.8 <u>Beispiel</u>: $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k}$ konvergiert, ebenso

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{2k+1}.$$

[Später werden die Werte dieser Reihen später bestimmen]

7.9 <u>Def.:</u> $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut, falls $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

7.10 <u>Bsp.:</u> absolute Konvergenz $\overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow}$ Konvergenz

<u>Bew.:</u> "$\Rightarrow$": Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

Sei $\varepsilon > 0$. Nach Cauchykriterium (7.3) existiert $N \in \mathbb{N}$ mit: $\sum_{k=m}^{n} |a_k| < \varepsilon$ falls $n \geq m \geq N$.

Dann gilt aber $\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=m}^{n} |a_k| < \varepsilon$ falls $n \geq m \geq N$.

Wieder nach 7.3 konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

"$\not\Leftarrow$": $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k}$ konvergiert (7.8), aber nicht absolut (7.6). $\square$

7.11 <u>Satz</u> (Majorantenkriterium): Seien $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, $(c_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ Folgen mit $|a_k| \leq c_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Falls $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ konvergiert, so konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut und es gilt $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} c_k$.

<u>Bew.:</u> Sei $\varepsilon > 0$. $\exists N \in \mathbb{N}: \left|\sum_{k=m}^{n} c_k\right| < \varepsilon$ falls $n \geq m \geq N$ (Cauchykriterium).

Aber $\sum_{k=m}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=m}^{n} c_k < \varepsilon$ falls $n \geq m \geq N$.

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert nach Cauchykriterium.

$\sum_{k=0}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{n} c_k \overset{\text{Bem. 5.7}}{\Rightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} c_k$. $\square$

7.12 <u>Beispiele</u> Für $s = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ setze $x^s := \sqrt[q]{x^p}$ [dies ist wohldefiniert!]

Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \begin{cases} \text{konvergiert, falls } s > 1 \\ \text{divergiert, falls } s \leq 1. \end{cases}$$

$s > 1$: Sei $s_k := \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^s}$.

Falls $2^l - 1 \geq k$, so gilt

$$s_k \leq s_{2^l-1} = 1 + \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s}\right) + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{(2^{l-1})^s} + \dots + \frac{1}{(2^l-1)^s}\right)}_{2^{l-1} \text{ Summanden}}$$

$$\leq 1 + \frac{2}{2^s} + \dots + \frac{2^{l-1}}{(2^{l-1})^s}$$

$$= \sum_{m=0}^{l-1} \left(2^{1-s}\right)^m$$

$$= \frac{1 - \left(2^{1-s}\right)^l}{1 - 2^{1-s}}$$

$$\overset{s>1}{\leq} \frac{1}{1 - 2^{1-s}}.$$

$\Rightarrow (s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ beschränkt (und monoton) $\Rightarrow (s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert.

$s \leq 1$: $s_k = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots + \frac{1}{k^s} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k}$

$\Rightarrow s_k$ ist nicht beschränkt. $\square$

7.13 <u>Satz</u> (Quotientenkriterium): Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^*$ eine Folge.

Falls $0 < \Theta < 1$ existiert mit $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \Theta$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.

Bew.: Induktion liefert $|a_n| \leq |a_0|\,\Theta^n$ für $n \in \mathbb{N}$.

Es gilt $\left(\sum_{n=0}^{k} |a_n| \leq\right) \sum_{n=0}^{k} |a_0| \cdot \Theta^n = |a_0| \cdot \sum_{n=0}^{k} \Theta^n \xrightarrow{k\to\infty} |a_0| \cdot \frac{1}{1-\Theta} < \infty$.

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_0|\,\Theta^n$ ist konvergente Majorante

$\overset{7.11}{\Rightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut. $\square$

7.14 <u>Bem.</u>: In 7.13 genügt es, wenn $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_n \neq 0$ und $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \Theta$ für alle $n \geq n_0$.

7.15 <u>Beispiele</u>: (i) $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{n^2}{2^n}}_{=:a_n}$ konvergiert

Für $n \geq 3$ gilt $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^2\, 2^n}{2^{n+1} \cdot n^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \leq \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9} =: \Theta < 1$

(ii) Für $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n}}_{=:a_n}$ gilt $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{n+1} < 1$,

aber es existiert kein $\Theta < 1$ mit $\frac{n}{n+1} \leq \Theta$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Ähnlich für $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, aber $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert, $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert.

7.16 <u>Satz</u> (Cauchyprodukt): Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent; setze $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$.

Dann konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right).$$

Bew.: Setze $A := \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $B := \sum_{n=0}^{\infty} b_n$, $S_m := \sum_{n=0}^{m} c_n$,

$D_m := \left(\sum_{n=0}^{m} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{m} b_n\right)$; es gilt $\lim_{m\to\infty} D_m = A \cdot B$.

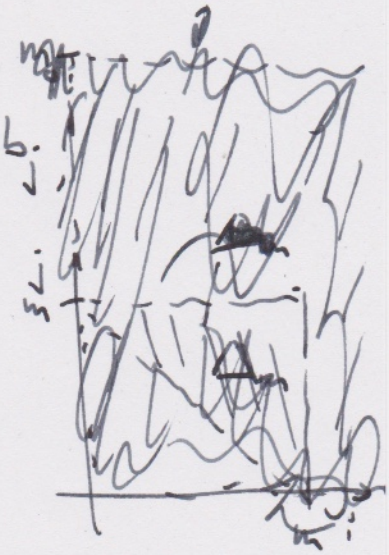
Zu zeigen: $\lim_{m\to\infty} (D_m - S_m) = 0$.

Es gilt $D_m = \sum_{0\le i,j\le m} a_i b_j$ und

$$S_m = \sum_{n=0}^{m}\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k\right) = \sum_{n=0}^{m} \sum_{i+j=n} a_i b_j = \sum_{i+j\le m} a_i b_j,$$

also $D_m - S_m = \sum_{(i,j)\in\Delta_m} a_i b_j$, wo

$$\Delta_m := \{(i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid i,j \le m,\ i+j > m\}.$$



Setze $E_m := \left(\sum_{n=0}^{m} |a_n|\right)\left(\sum_{n=0}^{m} |b_n|\right) = \sum_{0\le i,j\le m} |a_i b_j|$,

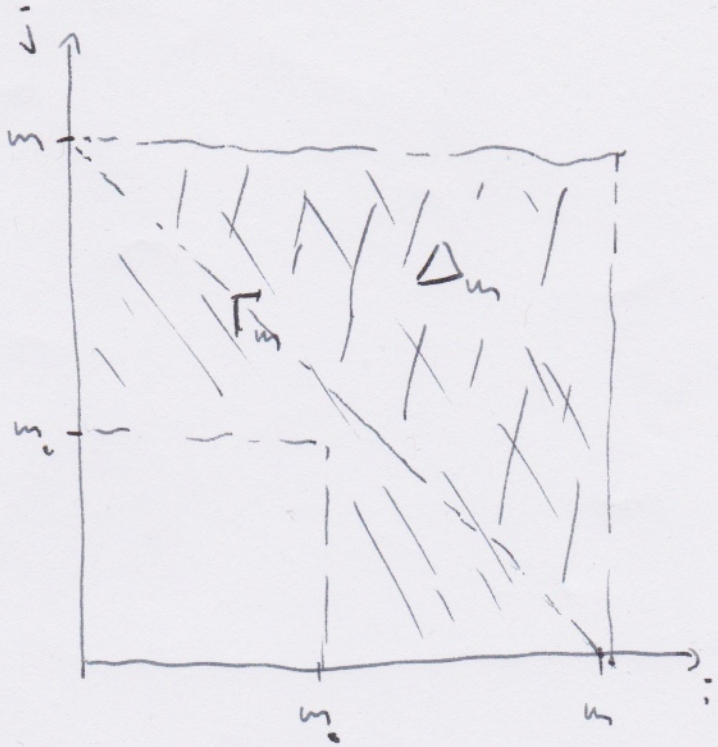
dann konvergiert $(E_m)_{m\in\mathbb{N}}$.

$\Rightarrow$ Zu $\varepsilon > 0$ existiert $m_0 \in \mathbb{N}$ mit $|E_m - E_{m_0}| < \varepsilon$ falls $m \ge m_0$.

Setze $\Gamma_m := \{(i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid i,j \le m\} \setminus \{(i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid i,j \le m_0\}$,

dann gilt $\Delta_m \subset \Gamma_m$ falls $m > 2m_0$.

Außerdem gilt $E_m - E_{m_0} = \sum_{(i,j)\in\Gamma_m} |a_i b_j|$.



Es folgt $|D_m - S_m| = \left| \sum_{(i,j)\in\Delta_m} a_i b_j \right|$

$$\leq \sum_{(i,j)\in\Delta_m} |a_i b_j|$$

$$\leq \sum_{(i,j)\in\Gamma_m} |a_i b_j|$$

$$= E_m - E_{m_0}$$

$$< \varepsilon \qquad \text{falls } m > 2m_0$$

$\Rightarrow \lim_{m\to\infty} (D_m - S_m) = 0.$

Absolute Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$:

$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$ wird majorisiert durch $\sum_{n=0}^{\infty} \bar{c}_n$, wo

$$\bar{c}_n = \sum_{k=0}^{n} |a_{n-k}||b_k|.$$

Aber $\sum_{n=0}^{\infty} \bar{c}_n$ konvergiert gegen $\left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|\right)$ nach demselben Argument wie oben. $\square$

7.17 <u>Def.:</u> Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe und $\gamma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion.

Dann heißt $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\gamma(n)}$ Umordnung von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

7.18 <u>Prop. und Def.:</u> Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, dann konvergiert auch jede Umordnung gegen denselben Grenzwert; wir schreiben dann auch $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$.

Bew.: Setze $A := \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und sei $\gamma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion.

Zu zeigen: $\lim_{m \to \infty} \sum_{k=0}^{m} a_{\gamma(k)} = A$.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}$ [Warum?]

$$\Rightarrow \left| A - \sum_{k=0}^{n_0-1} a_k \right| = \left| \sum_{k=n_0}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sei $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\{\gamma(0), \gamma(1), \ldots, \gamma(N)\} \supset \{0, 1, \ldots, n_0 - 1\}$.

Dann gilt für $m \geq N$

$$\left| \sum_{k=0}^{m} a_{\gamma(k)} - A \right| \leq \left| \sum_{k=0}^{m} a_{\gamma(k)} - \sum_{k=0}^{n_0-1} a_k \right| + \left| \sum_{k=0}^{n_0-1} a_k - A \right|$$

$$\leq \sum_{j \in \{\gamma(0), \ldots, \gamma(m)\} \setminus \{0, \ldots, n_0-1\}} |a_j| + \left| \sum_{k=0}^{n_0-1} a_k - A \right|$$

$$\leq \sum_{j=n_0}^{\infty} |a_j| + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$< \varepsilon.$$

$\square$

7.19 <u>Bem.:</u> Absolute Konvergenz ist eine wesentliche Voraussetzung.

Man kann sogar zeigen:

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent, aber nicht absolut konvergent.

Dann existiert zu jedem $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Umordnung mit

$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\gamma(n)} = \lambda$. $\square$