6. Vollständigkeit

"It is like being lost in a jungle, and trying to use all the knowledge that you can gather, to come up with some new tricks — and with some luck you might find a way out."

Maryam Mirzakhani

6.1 Def.: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ eine Folge.

(i) Sei $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ eine Folge mit $n_0 < n_1 < \dots$.
Dann heißt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) $a \in \mathbb{K}$ heißt Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ besitzt mit $a = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$.

6.2 Beispiele: (i) $(2k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist Teilfolge von $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ [mit $n_k = 2k$].

(ii) $(1, 1, \dots)$, $(-1, -1, \dots)$ und $(1, -1, 1, 1, -1, \dots)$ sind Teilfolgen von $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
$1, -1$ sind Häufungspunkte von $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

6.3 Satz (Bolzano-Weierstraß): Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ besitzt einen Häufungspunkt.

Bew.: Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ beschränkt, d.h. es existieren $A, B \in \mathbb{R}$ mit $A \leq c_n \leq B$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

1. Wir konstruieren induktiv $a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots \in \mathbb{R}$ mit

(i) $[a_{k+1}, b_{k+1}] \subset [a_k, b_k]$ für $k \in \mathbb{N}$

(ii) $b_k - a_k \leq 2^{-k} \cdot (B-A)$ für $k \in \mathbb{N}$

(iii) $[a_k, b_k]$ enthält unendlich viele Folgenglieder von $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

IA: Setze $a_0 := A$, $b_0 := B$, dann gelten (ii) und (iii) für $k=0$.

IS: Seien $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ mit (ii) und (iii) bereits konstruiert.

Setze

$$a_{k+1} := \begin{cases} a_k, & \text{falls } [a_k, \frac{a_k+b_k}{2}] \text{ unendlich viele Folgenglieder von } (c_n)_{\mathbb{N}} \text{ enthält} \\ \frac{a_k+b_k}{2}, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$b_{k+1} := \begin{cases} \frac{a_k+b_k}{2}, & \text{falls } [a_k, \frac{a_k+b_k}{2}] \text{ unendlich viele Folgenglieder von } (c_n)_{\mathbb{N}} \text{ enthält} \\ b_k, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$[a_{k+1}, b_{k+1}]$ erfüllt dann (i), (ii), (iii).

Wegen (i) und (ii) gibt nach Satz 3.2 (Intervallschachtelungsprinzip)

$$\exists!\ c \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} [a_k, b_k].$$

2. Wir definieren induktiv eine Teilfolge $(c_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $c_{n_k} \in [a_k, b_k]$ für $k \in \mathbb{N}$:

IA: $n_0 := 0$, dann $c_{n_0} = c_0 \in [A, B] = [a_0, b_0]$.

IS: Seien $n_0 < n_1 < \dots < n_k \in \mathbb{N}$ mit $c_{n_k} \in [a_k, b_k]$ bereits definiert.

$[a_{k+1}, b_{k+1}]$ enthält unendlich viele Folgenglieder von $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, also existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $N > n_k$ und $c_N \in [a_{k+1}, b_{k+1}]$.

Setze $n_{k+1} := N$, dann $c_{n_{k+1}} \in [a_{k+1}, b_{k+1}]$.

3. $\lim\limits_{k\to\infty} c_{n_k} = c$:

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $k_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass $2^{-k_0}(B-A) < \varepsilon$.

Für $k \geq k_0$ gilt dann $c_{n_k}, c \in [a_k, b_k] \subset [a_{k_0}, b_{k_0}]$, also $|c_{n_k} - c| \leq b_{k_0} - a_{k_0} \overset{(ii)}{\leq} 2^{-k_0}(B-A) < \varepsilon$. $\square$

.4 <u>Bem.</u>: Man kann zeigen:

Bolzano-Weierstraß + Archimedisches Axiom

$\Leftrightarrow$ Ordnungsvollständigkeit.

6.5 **Def.:** Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ heißt (streng) monoton wachsend, falls gilt: $a_n \leq a_{n+1}$ $(a_n < a_{n+1})$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

∼∼ ∼

fallend ∼∼ $\geq$ $>$ ∼∼

Eine Folge heißt monoton, falls sie monoton wachsend oder monoton fallend ist.

6.6 **Satz:** Jede beschränkte monotone Folge $(a_n)_{\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert.
["ohne Einschränkung der Allgemeinheit" – warum?]

Bew.: Sei $(a_n)_{\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ monoton wachsend (o.E.d.A.) und beschränkt.

6.3 $\Rightarrow$ $\exists$ Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a \in \mathbb{R}$.

Zu zeigen: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Sei $\varepsilon > 0$. $\exists\, K \in \mathbb{N}$ mit $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$ für alle $k \geq K$.

Setze $N := n_K$. Falls $n \geq N$, so existiert $K' \geq K$ mit $n_K = N \leq n \leq n_{K'}$. [warum?]

Es gilt dann $a_{n_K} \leq a_n \leq a_{n_{K'}}$, also

$$|a_n - a| \underset{\text{[warum?]}}{\leq} \max(|a_{n_K} - a|, |a_{n_{K'}} - a|) < \varepsilon. \qquad \square$$

6.7 <u>Beispiele</u>: Sei $k \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}_+^*$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie im Beweis von Satz 3.3 ($[a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, war Intervallschachtelung mit $\sqrt[k]{x} \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$).

Dann ist $(a_n)_{\mathbb{N}}$ monoton wachsend und beschränkt, also konvergent, und zwar gegen $\sqrt[k]{x}$.

Es gilt $|\sqrt[k]{x} - a_n| \leq b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(x-1)$ (für $x > 1$).

$\rightsquigarrow$ 3.3 liefert eine Methode, $\sqrt[k]{x}$ zu approximieren und den Fehler abzuschätzen.

6.8 <u>Def.</u>: $(a_n)_{\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ heißt Cauchyfolge, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_0 : |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

6.9 <u>Bem.</u>: Jede konvergente Folge $(a_n)_{\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ ist Cauchy.

Bew.: Sei $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ falls $n \geq n_0$.

Falls $m, n \geq n_0$, so gilt

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - a| + |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad \square$$

6.10 <u>Def. und Satz:</u> $\mathbb{R}$ ist vollständig, d.h. jede Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ konvergiert.

Bew.: Sei $(a_n)_{\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ Cauchy.

1. $(a_n)_{\mathbb{N}}$ ist beschränkt. [Warum?]

2. Satz 6.3 $\Rightarrow$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$;

   sei $a := \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$.

3. Bleibt zu zeigen: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

   Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

   $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy $\Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N}: \forall\, m,n \geq n_0: |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.

   $a_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} a \Rightarrow \exists\, k_0 \in \mathbb{N}: \forall\, k \geq k_0: |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.

   $n_k \xrightarrow{k\to\infty} \infty \Rightarrow \exists\, k_1 \geq k_0: n_{k_1} \geq n_0$

   Falls nun $n \geq n_{k_1}$, so gilt $|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_{k_1}}| + |a_{n_{k_1}} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. $\square$

6.11 <u>Bem:</u> (i) Sei $k \in \mathbb{N}$ und x eine Primzahl.

   Sei $(a_n)_{\mathbb{N}}$ wie in 3.3 bzw. 6.7, dann $(a_n)_{\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$.

   6.7 $\Rightarrow$ $a_n \to \sqrt[k]{x}$

   6.9 $\Rightarrow$ $(a_n)_{\mathbb{N}}$ ist Cauchy

   Aber: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt[k]{x} \notin \mathbb{Q}$ (wie Blatt 3, Aufgabe 4).

   $\Rightarrow$ In $\mathbb{Q}$ konvergiert <u>nicht</u> jede Cauchyfolge.

(ii) Vollständigkeit + Archimedisches Axiom $\Leftrightarrow$ Ordnungsvollständigkeit [Z.13]