5. Folgen und Grenzwerte

„Seit der Zeit der Griechen bedeutet 'Mathematik' zu sagen, 'Beweis' zu sagen."

Nicolas Bourbaki

Ab jetzt schreiben wir $\mathbb{K}$ für $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$ (später auch für $\mathbb{C}$).

5.1 <u>Def.</u>: Eine Folge in $\mathbb{K}$ ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{K}$.

Wir schreiben oft $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(\subset \mathbb{K})$ oder $(a_n)_{\mathbb{N}}$ oder $(a_0, a_1, \ldots)$.

$\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{K}$ ist die der Folge unterliegende Menge (bzw. das Bild der Folge).

Wir fassen auch $(a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \ldots)$ als Folge auf und schreiben $(a_n)_{n\geq n_0}$.

5.2 <u>Beispiele</u>: (i) $a_n = a$ für $n \in \mathbb{N}$ $\rightsquigarrow (a, a, \ldots)$

(ii) $a_n = \frac{1}{n+1}$ $\rightsquigarrow (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$

(iii) Fibonacci-Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch $a_0 := 1$, $a_1 := 1$, $a_{n+1} := a_n + a_{n-1}$ für $n \geq 1$. $\rightsquigarrow (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$

(iv) $a_n = \frac{n}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$ $\rightsquigarrow (0, \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{8}, \frac{4}{16}, \frac{5}{32}, \ldots)$

(v) $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$ $\rightsquigarrow (1, -1, 1, -1, \ldots)$

5.3 <u>Def.</u>: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$ und sei $a \in \mathbb{K}$.

(i) Man sagt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a, $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, falls gilt: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$.

(ii) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert, falls sie gegen kein $a \in \mathbb{K}$ konvergiert.

(iii) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert bestimmt gegen $+\infty$ (bzw. $-\infty$), $a_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$ $(-\infty)$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ $(-\infty)$, falls gilt:

$\forall L \in \mathbb{K}\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : a_n > L$ (bzw. $a_n < L$).

(iv) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt nach oben (unten) beschränkt, falls $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nach oben (unten) beschränkt ist.

5.4 <u>Beispiele</u>: (i) $a_n = a$ für $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$:

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n_0 := 0$. Für $n \geq n_0$ gilt: $|a_n - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon$.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$:

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$.

Für $n \geq n_0$ gilt dann: $\left|\frac{1}{n+1} - 0\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$.

(iii) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Fibonacci-Zahlen. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Induktion liefert $a_n \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Sei nun $L \in \mathbb{K}$ gegeben. Wähle $n_0 := L+1$, dann gilt für $n \geq n_0$: $a_n \geq n \geq n_0 > L$.

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$:

Nach Blatt 2, Aufgabe 3a) gilt: $n^2 \leq 2^n$ für $\overset{\mathbb{N}}{\overset{\cup}{n}} \neq 3$. (*)

Sei nun $\varepsilon > 0$. Wähle $\mathbb{N} \ni n_0 > \max(3, \frac{1}{\varepsilon})$. (**)

Für $n \geq n_0$ gilt dann

$$\left|\frac{n}{2^n} - 0\right| = \frac{n}{2^n} = \frac{n^2}{2^n} \cdot \frac{1}{n} \overset{(*)}{\leq} \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} \overset{(**)}{<} \varepsilon.$$

(v) $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert:

Wir müssen zeigen: für jedes $a \in \mathbb{K}$ konvergiert $((-1)^n)_{\mathbb{N}}$ nicht gegen a.

Sei also $a \in \mathbb{K}$ beliebig. Dann gilt $|1-a| \geq 1$ oder $|-1-a| \geq 1$.

Für $\varepsilon := 1 > 0$ gilt: $|(-1)^n - a| \geq 1 = \varepsilon$

oder $|(-1)^{n+1} - a| \geq 1 = \varepsilon$.

Für jedes n_0 existiert daher ein $n \geq n_0$ mit $|(-1)^n - a| \geq \varepsilon$.

$\Rightarrow ((-1)^n)_{\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gegen a.

Mit Quantoren:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall n_0 \in \mathbb{N} : \exists n \geq n_0 : |(-1)^n - a| \geq \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \neg\left(\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \neg(|(-1)^n - a| \geq \varepsilon)\right)$$

es gilt nicht

$$\Leftrightarrow \neg\left(\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |(-1)^n - a| < \varepsilon\right)$$

$$\Leftrightarrow \neg\left((-1)^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a\right).$$

5.5 <u>Bem.</u>: Jede konvergente Folge ist beschränkt,
aber nicht jede beschränkte Folge konvergiert.

Bew.: 1. Sei $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, dann existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit:

$|a_n - a| < 1$ für alle $n \geq n_0$. [1 spielt die Rolle von ε.]

Sei $L := \max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n_0-1}|, 1+|a|\}$,

dann gilt $a_n \leq L$ für $n < n_0$

und $|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a| \leq L$, $n \geq n_0$,

also $-L \leq a_n \leq L$ für $n \in \mathbb{N}$.

[Wir haben benutzt, dass jede endliche Teilmenge von $\mathbb{R}$ ein Maximum besitzt. Warum gilt das?]

2. Beispiel 5.4 (v): $((-1)^n)_{\mathbb{N}}$ ist beschränkt und divergiert. □

5.6 <u>Prop.</u>: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ eine Folge.
Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $a \in \mathbb{K}$ konvergiert und gegen $a' \in \mathbb{K}$ konvergiert, so gilt $a = a'$.
[Dies rechtfertigt die Schreibweise $\lim_{n\to\infty} a_n$ für den Grenzwert.]

Bew.: Falls $a \neq a'$, setze $\varepsilon := \frac{|a-a'|}{2} > 0$.

Wegen $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$ existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ f. $i, n \geq n_0$.

Wegen $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a'$ existiert $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a'| < \varepsilon$ f. $i, n \geq n_1$. [alle]

Für $\bar{n} := \max(n_0, n_1)$ gilt dann

$$|a-a'| = |a - a_{\bar{n}} + a_{\bar{n}} - a'| \overset{2.9(iv)}{\leq} |a - a_{\bar{n}}| + |a_{\bar{n}} - a'| < \varepsilon + \varepsilon = |a-a'|. \quad ↯ \quad \square$$

5.7 Prop.: Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, konvergente Folgen in $\mathbb{K}$, und seien $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

(i) Dann konvergieren die Folgen $(\lambda \cdot a_n + \mu \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda \cdot a_n + \mu \cdot b_n) = \lambda \cdot \lim_{n\to\infty} a_n + \mu \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

und

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n .$$

[Insbesondere bilden konvergente Folgen einen Vektorraum.]

(ii) Falls $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$, so existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $b_n \neq 0$ f. $n \geq n_0$ und die Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq n_0}$ konvergiert mit

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} .$$

Bew.: (i) Wir zeigen zuerst die Formel für das Produkt:

Sei $a := \lim_{n\to\infty} a_n$, $b := \lim_{n\to\infty} b_n$.

Nach 5.5 ist $(a_n)_{\mathbb{N}}$ beschränkt, d.h. insbesondere

$\exists L > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : |a_n|, |b_n| \leq L$.

Sei nun $\varepsilon > 0$.

$\exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a|, |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2L}$ falls $n \geq n_0$.

Für $n \geq n_0$ gilt dann

$$|a_n \cdot b_n - a \cdot b| = |a_n \cdot (b_n - b) + (a_n - a) \cdot b| \leq |a_n \cdot (b_n - b)| + |(a_n - a) \cdot b|$$

$$\leq |a_n| \cdot |b_n - b| + |a_n - a| \cdot |b| < L \cdot \frac{\varepsilon}{2L} + \frac{\varepsilon}{2L} \cdot L = \varepsilon.$$

(ii) Sei wieder $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ und $0 \neq b = \lim_{n\to\infty} b_n$. Sei $L := |a| + 1 > |a|$.

$b \neq 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |b_n - b| < \frac{|b|}{2}$.

Für alle $n \geq n_0$ gilt daher $|b_n| = |b + b_n - b| \geq |b| - |b_n - b| > \frac{|b|}{2} > 0$. (*)

Sei nun $\varepsilon > 0$.

Dann existiert $n_1 \in \mathbb{N}$ mit

$|a_n - a| < \frac{|b| \cdot \varepsilon}{4}$ und $|b_n - b| < \frac{|b|^2 \cdot \varepsilon}{4L}$ falls $n \geq n_1$. (**)

Für $n \geq \bar{n} := \max(n_0, n_1)$ gilt dann

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a_n b - b_n a}{b_n \cdot b}\right| \overset{(*)}{\leq} 2 \cdot \frac{|a_n \cdot b - b_n \cdot a|}{|b|^2} \leq 2 \cdot \frac{|a_n b - ab| + |ab - b_n a|}{|b|^2}$$

$$\leq 2 \cdot \left(\frac{|a_n - a| \cdot |b|}{|b|^2} + \frac{|b - b_n| \cdot |a|}{|b|^2}\right) \overset{(**)}{<} 2 \cdot \left(\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4}\right) = \varepsilon. \qquad \square$$

5.8 Beispiel: Sei $c_n := \dfrac{4n^3+n}{n^3+n^2+1}$.

Für $n \geq 1$ gilt $c_n = \dfrac{\overbrace{4+\frac{1}{n^2}}^{=:a_n}}{\underbrace{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}_{=:b_n}}$.

Nach 5.7 gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 4 + \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}_{=0}$ [warum?]

und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1 + \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}_{=0} + \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}}_{=0}$,

also $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 4$.

5.9 Bem.: Seien $(a_n)_{\mathbb{N}}, (b_n)_{\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ konvergent mit $a_n \leq b_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Aber: $a_n < b_n$ für $n \in \mathbb{N}$ impliziert <u>nicht</u> $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Bew.: Falls $b := \lim\limits_{n\to\infty} b_n < a := \lim a_n$, so existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit:

$|a_n - a|, |b_n - b| < \frac{a-b}{2}$ für alle $n \geq n_0$.

Dann gilt $a_n > a - \frac{a-b}{2} = b + \frac{a-b}{2} > b_n$ falls $n \geq n_0$, ↯

Zweite Behauptung: $a_n := 0$, $b_n := \frac{1}{n+1}$, dann $a_n < b_n$ und

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. $\square$