4. Abzählbarkeit

"Trennen und Zählen lag nicht in meiner Natur."

J. W. v. Goethe

4.1 Def.: Sei $M \neq \emptyset$ eine Menge.

M heißt abzählbar, falls eine Surjektion

$$\mathbb{N} \to M$$

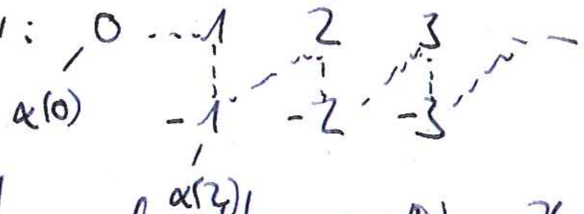
existiert.

M heißt abzählbar unendlich, falls M abzählbar und nicht endlich ist. [M endlich heißt: $\exists\, n \in \mathbb{N}$ und eine Bijektion $\{1, \dots, n\} \to M$.]

M heißt überabzählbar, falls M nicht abzählbar ist.

4.2 Beispiele: (i) $\mathbb{N}$ ist abzählbar, denn $id: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist surjektiv.

(ii) $\mathbb{Z}$ ist abzählbar:



[$\alpha(k) := \begin{cases} -\frac{k}{2} & \text{falls } k \text{ gerade} \\ +\frac{k+1}{2} & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}$] definiert eine Surjektion $\alpha: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$.

(iii) $\mathbb{Q}$ ist abzählbar:

$$\begin{array}{ccccc}
0 & & & & \\
\frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \cdots \\
-\frac{1}{1} & -\frac{2}{1} & -\frac{3}{1} & -\frac{4}{1} & \cdots \\
\frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \cdots \\
-\frac{1}{2} & -\frac{2}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{4}{2} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

definiert eine Surjektion $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$.

[Diese f ist nicht injektiv, kann aber zu einer Bijektion modifiziert werden. Wie?]

(iv) Allgemeiner zeigt man:
Eine abzählbare Vereinigung von abzählbaren Mengen ist abzählbar: $A_0, A_1, \ldots$ abzählbare Mengen

$$\Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \text{ abzählbar.}$$

4.3 <u>Satz:</u> $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar.

Bew.: Angenommen, es gäbe eine Surjektion $\alpha: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

A. Wir konstruieren induktiv Intervalle $[a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, ~~eintrefflich~~ mit $\alpha(n) \notin [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$.

IA: Wähle $a_0 := \alpha(0) + 1$, $b_0 := \alpha(0) + 2$.

Dann gilt $\alpha(0) \notin [a_0, b_0]$ und $b_0 - a_0 = 1 = \left(\frac{1}{3}\right)^0$.

IS: Seien $a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_n < b_n \leq \ldots \leq b_1 \leq b_0$

mit $\alpha(n) \notin [a_n, b_n]$ und $b_n - a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

bereits konstruiert.

Dann sei $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ das erste Drittel des Intervalls $[a_n, b_n]$, welches $\alpha(n+1)$ nicht enthält.

In Formeln:

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] := \begin{cases} \left[a_n, a_n + \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right], & \text{falls } \alpha(n+1) \notin \left[a_n, a_n + \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] \\ \left[a_n + \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}, a_n + 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right], & \text{falls } \alpha(n+1) \in \left[a_n, a_n + \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) \\ \left[a_n + 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}, b_n\right], & \text{falls } \alpha(n+1) = a_n + \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \end{cases}$$

Dann gilt $\alpha(n+1) \notin [a_{n+1}, b_{n+1}]$, $b_{n+1} - a_{n+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$,

$$a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n.$$

B. Nach dem Intervallschachtelungsprinzip (Satz 3.2) existiert genau ein $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$ $\left[\text{beachte: } \underbrace{\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \left(\frac{1}{3}\right)^{n_0} < \varepsilon}_{\text{d.h. 3.2(ii) gilt}}\right]$.

C. α surjektiv $\Rightarrow$ $x = \alpha(\bar{n})$ für ein $\bar{n} \in \mathbb{N}$.

Aber $x = \alpha(\bar{n}) \notin [a_{\bar{n}}, b_{\bar{n}}]$, also $x \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$. $\lightning$ $\square$