3. Intervallschachtelungen

"Alles ist Zahl."

Die Pythagoräer, nach Aristoteles

3.1 Def.: Für $a \leq b \in \mathbb{R}$ setze

$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ abgeschlossenes Intervall

$(a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ offenes "

$[a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ halboffenes "

$(a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ " "

3.2 Satz (Intervallschachtelungsprinzip): Seien $[a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, Intervalle mit

(i) $\forall n \in \mathbb{N}: [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}: b_{n_0} - a_{n_0} < \varepsilon$.

Dann existiert genau ein $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$.

Bew.: (i) $\Rightarrow a_n \leq b_m$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$: b_n ist obere Schranke für $A := \{a_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ $(*)$

$\mathbb{R}$ vollständig angeordnet $\Rightarrow \sup A$ existiert

$(*) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: \sup A \leq b_n$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq \sup A \leq b_n$

$\Rightarrow$ ~~sup A~~ $\forall n \in \mathbb{N}: \sup A \in [a_n, b_n] \Rightarrow \sup A \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset$.

Falls $s, s' \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$ mit $s < s'$, so existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ (nach ii) mit $b_{n_0} - a_{n_0} < s' - s$. Andererseits gilt $s' - s \leq b_{n_0} - a_{n_0} < s' - s$. ↯ □

3.3 Satz: Sei $0 < x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}^*$.
Dann existiert genau ein $0 < y \in \mathbb{R}$ mit $y^k = x$.
Wir schreiben $y = x^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{x}$.

Bew.: A. Für $x = 1$ wähle $y = 1$, dann gilt $y^k = x$.

B. Sei nun $x > 1$.

B1. Wir konstruieren induktiv $a_0, a_1, a_2, \ldots$ und $b_0, b_1, b_2, \ldots$:
Setze $a_0 := 1$, $b_0 := x$. Dann gilt $1 \le a_0 < b_0$ und $a_0^k \le x \le b_0^k = x^k$.
Falls $1 \le a_n < b_n \in \mathbb{R}$ mit $a_n^k \le x \le b_n^k$ bereits konstruiert sind, definiere $a_{n+1}, b_{n+1} \in \mathbb{R}$ wie folgt:

$$a_{n+1} := \begin{cases} a_n, & \text{falls } \left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)^k \ge x \\ \frac{a_n + b_n}{2}, & \text{falls } \left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)^k < x, \end{cases}$$

$$b_{n+1} := \begin{cases} \frac{a_n + b_n}{2}, & \text{falls } \left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)^k \ge x \\ b_n, & \text{falls } \left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)^k < x. \end{cases}$$

Dann gilt $1 \le a_{n+1} < b_{n+1}$ und $a_{n+1}^k \le x \le b_{n+1}^k$.
Induktion liefert $a_0, a_1, \ldots$ und $b_0, b_1, \ldots$.
Nach Konstruktion gilt für $n \in \mathbb{N}$:

(i) $a_n^k \le x \le b_n^k$ und $1 \le a_n \le a_{n+1} < b_{n+1} \le b_n$

(ii) $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (b_{n-1} - a_{n-1}) = \ldots = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \cdot (x - 1)$.

[Es gilt auch $b_0 - a_0 = x - 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot (x-1)$.]

B2. Sei $\varepsilon > 0$. Nach 2.10 (iv) ex. $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\left(\frac{1}{2}\right)^{n_0} < \frac{2\cdot\varepsilon}{x-1}$.

$$\Rightarrow b_{n_0} - a_{n_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n_0+1} \cdot (x-1) < \frac{2\cdot\varepsilon}{x-1} \cdot \frac{x-1}{2} = \varepsilon.$$

$$\overset{3.2}{\Rightarrow} \exists!\, y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n].$$ Es gilt $y^k \in [a_n^k, b_n^k]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. [mit 2.5 (vi)]

B3. Wegen (i) gilt auch $1 \leq a_n^k \leq a_{n+1}^k < b_{n+1}^k \leq b_n^k$, also

$[a_{n+1}^k, b_{n+1}^k] \subset [a_n^k, b_n^k]$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Weiter gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} b_n^k - a_n^k &= (b_n - a_n)(b_n^{k-1} a_n^0 + b_n^{k-2} a_n^1 + \dots + b_n^0 a_n^{k-1}) \\ &\leq (b_n - a_n)(x^{k-1} + x^{k-1} + \dots + x^{k-1}) \\ &= (b_n - a_n) \cdot k \cdot x^{k-1} \\ &\overset{(ii)}{=} \left(\frac{1}{2}\right)^n (x-1) \cdot k \cdot x^{k-1}. \end{aligned}$$

Sei nun $\bar{\varepsilon} > 0$. Nach 2.10 (iv) ex. $n_1 \in \mathbb{N}$ mit

$\left(\frac{1}{2}\right)^{n_1} < \frac{\bar{\varepsilon}}{(x-1)\cdot k \cdot x^{k-1}}$, also $b_{n_1}^k - a_{n_1}^k < \bar{\varepsilon}$.

$$\overset{3.2}{\Rightarrow} \exists!\, \bar{x} \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n^k, b_n^k].$$

(i) $\Rightarrow$ $x = \bar{x}$

B2 $\Rightarrow$ $y^k = \bar{x}$

$\Rightarrow$ $x = y^k$.

C. Der Fall $x < 1$ folgt aus $1 < x' := \frac{1}{x}$.

D. Falls $0 < y_0 < y_1 \in \mathbb{R}$, so gilt $0 < y_0^k < y_1^k$, also ist y mit $y^k = x$ eindeutig bestimmt. □

3.4 Bem.: $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; insbesondere gibt es irrationale Zahlen.

Bew.: Übung. □