2. Angeordnete Körper

"Man lernt Mathematik nicht, man gewöhnt sich nur daran." Paul Erdős

2.1 Def.: Ein Körper $(K, +, \cdot)$ ist eine Menge K mit Abbildungen ("Operationen")

$$+ : K \times K \to K$$
$$(x, y) \mapsto x + y$$
$$\cdot : K \times K \to K$$
$$(x, y) \mapsto x \cdot y$$

so dass folgendes gilt:

(A1) $\forall x, y, z \in K : (x+y)+z = x+(y+z)$ (Assoziativität)

(A2) $\forall x, y \in K : x+y = y+x$ (Kommutativität)

(A3) $\exists 0 \in K : \forall x \in K : 0+x = x$ (Existenz der Null)

(A4) $\forall x \in K \; \exists -x \in K : x+(-x) = 0$ (Existenz des Inversen)

(M1) $\forall x, y, z \in K \setminus \{0\} : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (Assoziativität)

(M2) $\forall x, y \in K \setminus \{0\} : x \cdot y = y \cdot x$ (Kommutativität)

(M3) $\exists 1 \in K \setminus \{0\} : \forall x \in K \setminus \{0\} : 1 \cdot x = x$ (Existenz des Eins)

(M4) $\forall x \in K \setminus \{0\} : \exists x^{-1} \in K \setminus \{0\} : x \cdot x^{-1} = 1$ (Existenz des Inversen)

(D) $\forall x, y, z \in K : x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$ (Distributivität)

Wir schreiben auch K^* für $K \setminus \{0\}$.

(A1)-(A4): $(K, +)$ ist abelsche Gruppe.

(M1)-(M4): $(K^*, \cdot)$ ist abelsche Gruppe.

(D): $+$ und $\cdot$ sind kompatibel.

2.2 <u>Bem.:</u> (i) $0, 1, -x, x^{-1}$ sind durch ihre Eigenschaften eindeutig bestimmt

(ii) $\forall x \in K: -(-x) = x$, $\forall x \in K^*: (x^{-1})^{-1} = x$

(iii) $\forall x, y \in K: -(x+y) = -x + (-y) \quad (=: -x-y)$

(iv) $\forall x \in K: x \cdot 0 = 0$

(v) $\forall x, y \in K: (x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $y = 0)$

(vi) $\forall x, y \in K: (-x) \cdot y = -(x \cdot y)$, $(-1) \cdot x = -x$

(vii) $\forall x, y \in K: (-x) \cdot (-y) = x \cdot y$

(viii) $\forall a_{ij}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$:

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \right)$$

(ix) $\forall x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} x_i \right) \left(\sum_{j=1}^{n} y_j \right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \cdot y_j \left[:= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} (x_i \cdot y_j) \right) \right]$$

(x) Für $a \in K$, $n \in \mathbb{N}$ setze $a^n := \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ mal}}$ $[n > 0]$, $a^0 := 1$, $a^{-n} := (a^{-1})^n$ $[\text{falls } a \neq 0]$.

Dann gilt:

$\forall x \in K, m, n \in \mathbb{N}: x^m \cdot x^n = x^{m+n}, (x^m)^n = x^{m \cdot n}, x^m \cdot y^m = (x \cdot y)^m$

Bew.: (i) Sei $\bar{0} \in K$ weiteres Element mit $\bar{0} + x = x$ für alle $x \in K$.

Dann gilt $0 \overset{(A3) \text{ für } \bar{0}}{=} \bar{0} + 0 \overset{(A2)}{=} 0 + \bar{0} \overset{(A3) \text{ für } 0}{=} \bar{0}$.

Rest Übung. $\square$

2.3 Beispiele: (i) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$

(ii) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

(iii) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

(iv) $\{0,1\}$ mit

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

sind Körper

(v) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}_+, +, \cdot)$ sind keine Körper, denn $(\mathbb{Z}, \cdot)$, $(\mathbb{R}_+, +)$ sind keine abelschen Gruppen.

2.4 Def.: Ein Körper $(K, +, \cdot)$ heißt angeordnet, falls eine Teilmenge $K_+^* \subset K^*$ mit folgenden Eigenschaften existiert:

(O1) $\forall x \in K^*$: entweder $x \in K_+^*$ oder $-x \in K_+^*$
(d.h. K^* ist disjunkte Vereinigung von K_+^* und $-K_+^* := \{-x \mid x \in K_+^*\}$)

(O2) $\forall x, y \in K_+^*$: $x + y \in K_+^*$

(O3) $\forall x, y \in K_+^*$: $x \cdot y \in K_+^*$.

$(K, +, \cdot)$ heißt archimedisch angeordnet, falls zusätzlich gilt:

(A) $\forall x, y \in K_+^*$ $\exists n \in \mathbb{N}$ mit $nx - y \in K_+^*$.

Wir schreiben

$0 < x$ oder $x > 0$, falls $x \in K_+^*$

$0 \leq x$ oder $x \geq 0$, falls $x \in K_+ := K_+^* \cup \{0\}$

$y < x$ oder $x > y$, falls $x - y \in K_+^*$

$y \leq x$ oder $x \geq y$, falls $x - y \in K_+$.

2.5 Bem.: Sei $(K, +, \cdot, <)$ ein angeordneter Körper.

(i) $<$ ist transitiv, d.h. $x<y,\ y<z \Rightarrow x<z$.

(ii) $0<x \Leftrightarrow -x<0$.

(iii) $x<y \Rightarrow (\forall a \in K: x+a<y+a)$.

(iv) $x<y,\ x'<y' \Rightarrow x+x'<y+y'$.

(v) $x<y,\ 0<a \Rightarrow a\cdot x<a\cdot y$.

(vi) $0<x<y,\ 0<a<b \Rightarrow 0<a\cdot x<b\cdot y$.

Ebenso für $\leq$.

(vii) $x \neq 0 \Rightarrow x^2>0$.

(viii) $0<x<y \Rightarrow 0<y^{-1}<x^{-1}$.

(ix) $0<1$.

Bew.: (i) $z-x = \underbrace{(z-y)}_{>0} + \underbrace{(y-x)}_{>0} \overset{(O2)}{>} 0$.

Rest Übg.

2.6 Bem.: Sei $(K, +, \cdot, <)$ ein angeordneter Körper.

Definiere eine Abbildung $\iota: \mathbb{N} \to K_+$, $n \mapsto \iota(n)$ wie folgt:

$\iota(0) := 0_K$.

Falls $\iota(n)$ definiert ist, setze $\iota(n+1) := \iota(n) + 1_K$.

Nachfolger von n in $\mathbb{N}$ Addition in K

Es gilt:

$m \neq n \Rightarrow \iota(m) \neq \iota(n)$, d.h. ι ist injektiv.

$\forall n \in \mathbb{N}: \iota(n) < \iota(n+1)$.

$\forall n \in \mathbb{N}, x \in K: nx = \iota(n)\cdot x$.

Wir schreiben oft n_K für $\iota(n)$; noch öfter wird ι unterdrückt.

Bew.: Induktion.

2.7 Prop. (Bernoullische Ungleichung): Sei $(K, +, \cdot, <)$ ein angeordneter Körper.

$\forall x \geq -1, n \in \mathbb{N}: (1+x)^n \geq 1 + nx.$

Bew.: Sei $x \geq -1$. $A(n): (1+x)^n \geq 1+nx$.

IA: $(1+x)^0 = 1 = 1 + 0x$, d.h. $A(0)$ ist wahr.

IS: Es gelte $(1+x)^n \geq 1+nx$ für ein $n \in \mathbb{N}$ (IV).

Dann gilt $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n (1+x) \overset{\text{(IV), 2.5(v) [1+x ≥ 0]}}{\geq} (1+nx)(1+x)$

$$= 1 + nx + x + \underbrace{\underbrace{nx^2}_{\geq 0 \text{ [2.5 (vii)]}}}_{\geq 0}$$

$$\geq 1 + nx + x = 1 + (n+1)x$$

$\Rightarrow A(n+1)$ gilt.

$\Rightarrow A(n)$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$. □

2.8 Def.: Sei $(K, +, \cdot, <)$ ein angeordneter Körper.

Definiere den Absolutbetrag $|\cdot| : K \to K_+$ durch $x \mapsto |x| := \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$

2.9 Bem.: (i) $|x| \geq 0$, $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $x \leq |x|$

(ii) $|-x| = |x|$

(iii) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

(iv) $|x+y| \leq |x| + |y|$ (Dreiecksungleichung)

(v) $|x+y| \geq |x| - |y|$

Bew.: (iv): $\left.\begin{array}{l} x \leq |x|, y \leq |y| \Rightarrow x+y \leq |x| + |y| \\ -x \leq |x|, -y \leq |y| \Rightarrow -(x+y) = -x-y \leq |x| + |y| \end{array}\right\} \Rightarrow |x+y| \leq |x| + |y|$

(v): $u := x+y$, $v := -y$, dann gilt:

$$|x| = |u+v| \overset{\text{(iv)}}{\leq} |u| + |v| \overset{\text{(ii)}}{=} |x+y| + |y| \Rightarrow |x| - |y| \leq |x+y|.$$

Read Übung. □

Z. 10 <u>Prop.</u>: Sei $(K, +, \cdot, <)$ archimedisch angeordnet.

(i) $\forall x \in K_+ \; \exists! \; n \in \mathbb{N}: \underset{\iota(n)}{n} \leq x < \underset{\iota(n+1)}{n+1}$.

Wir schreiben $[x]$ für dieses n.

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; n \in \mathbb{N}^* [:= \mathbb{N} \setminus \{0\}]: n^{-1} < \varepsilon$.

(iii) Sei $b > 1$. $\forall K \in \mathbb{N} \; \exists \; n \in \mathbb{N}: b^n > K$.

(iv) Sei $1 > b > 0$. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; n \in \mathbb{N}: b^n < \varepsilon$.

Bew.: (i) Sei $x \in K_+$.

Angenommen, es gäbe kein n wie in (i), d.h.:

$\forall n \in \mathbb{N}: n > x$ oder $x \leq n+1$.

Für $n \in \mathbb{N}$ betrachte die Aussage $A(n): x \geq n$.

IA: $x \geq 0$ ist wahr, d.h. $A(0)$ gilt.

IS: Es gelte $A(n)$ $\underbrace{\text{für ein } n \in \mathbb{N}}$, d.h. $x \geq n$.

$\Rightarrow n \not> x \overset{\text{Annahme}}{\Rightarrow} x \leq n+1 \Rightarrow A(n+1)$ gilt.

$\overset{\text{Induktion}}{\Rightarrow} A(n)$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.

$\lightning$ zum archimedischen Axiom.

Rest Übg (besonders Z. 7). $\square$

2.11 <u>Beispiele</u>: (i) $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ sind archimedisch angeordnet.

(ii) $\{0,1\}$, $\mathbb{C}$ sind nicht angeordnet.

$[1+1=0 \notin K_+^\wedge]$ $[i^2=-1 \not> 0]$

2.12 <u>Def.</u>: Sei $(K, +, \cdot, <)$ angeordnet, $M \subset K$ eine Teilmenge.

(i) $s \in K$ heißt obere (untere) Schranke für M, falls gilt: $\forall x \in M: x \leq s$ $(\forall x \in M: x \geq s)$.

(ii) M heißt nach oben (unten) beschränkt, falls eine obere (untere) Schranke für M existiert. M ist beschränkt, falls M nach oben und unten beschränkt ist.

(iii) $s \in K$ heißt Supremum von M, $s = \sup M$, falls s die kleinste obere Schranke für M ist, d.h.:

a) s ist obere Schranke

b) falls $s' \in K$ weitere obere Schranke ist, so gilt $s \leq s'$.

(... Infimum ... $s = \inf M$

... größte untere ...

a) ... untere ...

b) ... untere ... $s \geq s'$)

2.13 <u>Def.</u> (Supremumsprinzip): Ein angeordneter Körper heißt vollständig angeordnet, falls jede nach oben beschränkte nichtleere Teilmenge ein Supremum besitzt.

2.14 <u>Bem.:</u> (i) Auch wenn $\sup M$ existiert, gilt nicht immer $\sup M \in M$ (ebenso für $\inf M$).

(ii) Wenn $\sup M$ ($\inf M$) existiert, so ist es eindeutig bestimmt. [Warum?]

(iii) (jede nach oben beschränkte Teilmenge besitzt ein Supremum) $\Leftrightarrow$ (jede nach unten beschränkte Teilmenge besitzt ein Infimum)

Bew.: Übung (Multiplikation mit -1).

(iv) K vollständig angeordnet $\Rightarrow$ K archimedisch angeordnet.

Bew.: Übung.

2.15 <u>Beispiele</u> Sei K archimedisch angeordnet.

2.6 $\Rightarrow \mathbb{N} \subset K_+$ (wir unterdrücken ι).

$M := \{ n^{-1} \mid n \in \mathbb{N}^* \} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$.

M ist beschränkt: 0 ist untere Schranke, denn

$x^{-1} > 0$ für alle $x \in K_+^*$ (2.5 (viii)).

1 ist obere Schranke, denn

$1 \leq n$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$,

also $1 = 1^{-1} \geq n^{-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$ (2.5 (viii)).

$\inf M = 0$: 2.12 (iii) a) ✓ (mit 2.5)

2.12 (iii) b): Sei s' weitere untere Schranke.

Falls $s' > 0$, so existiert nach Eup.

2.10 (ii) ein $n \in \mathbb{N}^*$ mit

$s' > n^{-1} \in M$ ↯

$\Rightarrow s' \leq 0$.

$\sup M = 1$: klar. [warum?]

2.16 <u>Def. und Satz:</u> Es existiert ein vollständig angeordneter Körper. Dieser ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt und wird mit $\mathbb{R}$ bezeichnet.

o. Bew.

2.17 <u>Bemerkungen:</u> (i) "Dieser" Körper mit $\mathbb{R}$ zu bezeichnen ist ein (nicht unüblicher) Missbrauch der Bezeichnungen.

(ii) Eindeutigkeit bis auf Isomorphie bedeutet: Sei K ein weiterer vollständig angeordneter Körper, dann existiert ein Bijektion $\alpha: K \to \mathbb{R}$ mit $\alpha(0)=0$, $\alpha(1)=1$, $\alpha(x+y)=\alpha(x)+\alpha(y)$, $\alpha(x\cdot y)=\alpha(x)\cdot\alpha(y)$, $\alpha(K_+^*) = \mathbb{R}_+^*$.

(iii) Wir beweisen die Existenz von $\mathbb{R}$ nicht, d.h. wir betrachten das Supremumsprinzip als Axiom. $\mathbb{R}$ kann jedoch auch konstruiert werden; vgl. 2.19.

2.18 <u>Def. und Prop.:</u> Wir definieren die rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q} := \{ m\cdot n^{-1}, -m\cdot n^{-1} \mid m\in\mathbb{N}, n\in\mathbb{N}^* \} \subset \mathbb{R}.$$

Dieses bildet einen archimedisch angeordneten Körper.

Bew.: Übung. $\square$

2.19 <u>Exkurs:</u> Das Zahlensystem

$\mathbb{N} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \ldots\}$ als Menge

jedes Element hat einen Nachfolger $n+1$ $\rightsquigarrow$ $+, \cdot, <$

$\downarrow$ Hinzufügen von additiven Inversen

$\mathbb{Z} = \{0, 1, \ldots\} \dot\cup \{-1, -2, \ldots\}$; setze Operationen $+, \cdot$ und $<$ fort von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{Z}$

$\downarrow$ Hinzufügen von multiplikativen Inversen

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \;\middle|\; m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$; setze Operationen $+, \cdot$ und $<$ fort von $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{Q}$

$\downarrow$ Hinzufügen von Supremen beschränkter Mengen; setze $+, \cdot, <$ fort

$\mathbb{R}$

[$\downarrow$ Hinzufügen von Lösungen algebraischer Gleichungen $(x^2 = -1)$; setze $+, \cdot$ fort

$\mathbb{C}$]