Analysis I

0. Mengen und Abbildungen

0.1 'Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.'

G. Cantor

Die Definition ist intuitiv nützlich, aber formal problematisch.
Wir betrachten daher Mengen als primitives (nicht definiertes) Konzept.
Als mathematische Objekte werden Mengen dadurch bestimmt, was man damit tun kann.

0.2 Def.: Seien A, B Mengen.

(i) A ist Teilmenge von B, $A \subset B$, falls gilt:

$$x \in A \Rightarrow x \in B.$$

(ii) $A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$ Vereinigung.

(iii) $A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$ Durchschnitt.

(iv) $A \setminus B := \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$ Differenz.

(v) $\mathcal{P}(A) := \{C \mid C \subset A\}$ Potenzmenge, Menge aller Teilmengen von A.

(vi) $A \times B := \{(x,y) \mid x \in A \text{ und } y \in B\}$ kartesisches Produkt.

(vii) $\emptyset$ bezeichnet die leere Menge.

Wir fordern axiomatisch, dass dies wieder Mengen sind.

0.3 Def.: Sei S ein nichtleeres System von ~~[illegible]~~ Mengen.

(i) $\bigcup\limits_{M \in S} M := \{x \mid x \in M \text{ für ein } M \in S\}$.

(ii) $\bigcap\limits_{M \in S} M := \{x \mid x \in M \text{ für jedes } M \in S\}$.

Alternativ:

Sei $S = (M_i)_{i \in I}$ für eine Indexmenge I und sei $J \subset I$.

$$\bigcup_{i \in J} M_i := \{x \mid x \in M_i \text{ für ein } i \in J\},$$

$$\bigcap_{i \in J} M_i := \{x \in \bigcup_{i \in I} M_i \mid x \in M_i \text{ für jedes } i \in J\}.$$

Dies ist auch sinnvoll für $J = \emptyset$: $\bigcup\limits_{i \in \emptyset} M_i = \emptyset$, $\bigcap\limits_{i \in \emptyset} M_i = \bigcup\limits_{i \in I} M_i$.

0.4 <u>Prop.</u> (de Morgansche Regeln): Sei X eine Menge und $\emptyset \neq \mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ ein System von Teilmengen von X.

Dann gilt:

(i) $X \setminus \left(\bigcup_{M \in \mathcal{S}} M \right) = \bigcap_{M \in \mathcal{S}} X \setminus M$

(ii) $X \setminus \left(\bigcap_{M \in \mathcal{S}} M \right) = \bigcup_{M \in \mathcal{S}} X \setminus M$.

Bew.: (i)

$$\begin{aligned}
x \in X \setminus \left(\bigcup_{M \in \mathcal{S}} M \right) &\overset{0.2(iv)}{\iff} x \in X \text{ und } x \notin \bigcup_{M \in \mathcal{S}} M \\
&\overset{0.3(i)}{\iff} x \in X \text{ und } x \in M \text{ für kein } M \in \mathcal{S} \\
&\iff x \in X \text{ und } x \notin M \text{ für jedes } M \in \mathcal{S} \\
&\iff x \in X \text{ und } x \in X \setminus M \text{ für jedes } M \in \mathcal{S} \\
&\overset{0.3(ii)}{\iff} [x \in X \text{ und}]\, x \in \bigcap_{M \in \mathcal{S}} X \setminus M.
\end{aligned}$$

(ii) Übung. □

[Ist es wichtig, dass $\mathcal{S}$ nichtleer ist?]

0.5 Def. Seien X, Y Mengen. Eine Abbildung $f: X \to Y$ ist eine Vorschrift, welche jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ zuordnet. Wir schreiben $y = f(x)$ oder $x \mapsto y$.
$\{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$ heißt Graph von f.

[Formaler: Eine Abbildung $f: X \to Y$ ist eine Teilmenge $f \subset X \times Y$ sodass gilt:

$$\underset{\text{für alle}}{\forall} x \in X \ \underset{\text{existiert genau ein}}{\exists!} \ y \in Y \underset{\text{so dass gilt}}{:} (x, y) \in f.$$
]

Sei Z eine weitere Menge und $g: Y \to Z$ eine Abbildung, so ist die Komposition $g \circ f: X \to Z$, $x \mapsto g(f(x))$ wieder eine Abbildung.

0.6 Def. Seien X, Y Mengen, $f: X \to Y$ eine Abbildung, $A \subset X, B \subset Y$ Teilmengen.

(i) $f(A) := \{y \in Y \mid \exists x \in A : y = f(x)\}$ ist das Bild von A unter f.

(ii) $f^{-1}(B) := \{x \in X \mid \exists y \in B : y = f(x)\}$ ist das Urbild von B unter f.

0.7 Def.: Seien X, Y Mengen, $f: X \to Y$ eine Abbildung.

(i) f heißt injektiv, falls gilt:

$x, x' \in X$, $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.

[alternativ: $x, x' \in X$, $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$]

(ii) f heißt surjektiv, falls gilt:

$\forall y \in Y \; \exists x \in X : f(x) = y$.

[alternativ: $f(X) = Y$]

(iii) f heißt bijektiv, falls f injektiv und surjektiv ist.

0.8 Prop.: Sei $f: X \to Y$ bijektiv.

Dann existiert genau eine Umkehrabbildung (Inversen)

$f^{-1}: Y \to X$ mit der Eigenschaft

$$f \circ f^{-1} = id_Y \quad \text{und} \quad f^{-1} \circ f = id_X,$$

wo $id_Y : Y \to Y,\ y \mapsto y$ und $id_X : X \to X,\ x \mapsto x$ die identischen Abbn. sind.

Bew.: Wir definieren $f^{-1}: Y \to X$ durch

$$y \mapsto f^{-1}(y) := \text{dasjenige } x \in X \text{ mit } f(x) = y$$

f surjektiv $\Rightarrow$ so ein x existiert

f injektiv $\Rightarrow$ es existiert genau ein solches x

$\Rightarrow$ f^{-1} ist wohldefinierte Abbildung

$$f \circ f^{-1}(y) = f(\underbrace{f^{-1}(y)}_{\substack{\text{dasjenige } x \in X \\ \text{mit } f(x) = y}}) = y \quad \Big\} \Rightarrow f \circ f^{-1} = id_Y$$

$$f^{-1} \circ f(x) = \underbrace{f^{-1}(f(x))}_{\substack{\text{dasjenige } x' \in X \\ \text{mit } f(x') = f(x) \\ \Downarrow f \text{ injektiv} \\ x = x'}} = x \quad \Big\} \Rightarrow f^{-1} f = id_X$$

Sei $g: Y \to X$, $y \mapsto g(y)$ eine weitere Abbildung mit $f \circ g = id_Y$ und $g \circ f = id_X$.

Dann gilt $\forall y \in Y: f(g(y)) = y$, d.h.

$g(y)$ ist dasjenige $x \in X$ mit $f(x) = y$.

$\Rightarrow g(y) = f^{-1}(y)$

$\Rightarrow g = f^{-1}$. $\square$