9. Parameterabhängige Integrale

„Toni, du bist ein Teufelskerl"
[frei nach] Herbert Zimmermann

9.1 Propos. Seien $[a,b]\subset\mathbb{R}$, $U\subset\mathbb{R}$, $f:[a,b]\times U\to\mathbb{R}$ stetig.

Sei $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}\subset U$ konvergent mit $\bar{y}:=\lim_k y_k\in U$.

Definiere $F_k, F:[a,b]\to\mathbb{R}$ durch $F_k(x):=f\binom{x}{y_k}$, $F(x):=f\binom{x}{\bar{y}}$.

Dann gilt $F_k\xrightarrow{k\to\infty}F$ gleichmäßig.

Bew.: Setze $M:=\{y_k\mid k\in\mathbb{N}\}\cup\bar{y}$, dann ist M kompakt nach 4.3(i); $[a,b]\times M$ ist beschränkt und abgeschlossen, also kompakt.

Nach 4.13 ist $f|_{[a,b]\times M}:[a,b]\times M\to\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig.

Sei $\varepsilon>0$. Dann existiert $\delta>0$ sodass für $\binom{x}{y},\binom{x'}{y'}\in[a,b]\times M$ mit $\left\|\binom{x}{y}-\binom{x'}{y'}\right\|_2<\delta$ gilt $\left|f\binom{x}{y}-f\binom{x'}{y'}\right|<\varepsilon$.

Wegen $y_k\to\bar{y}$ existiert $K\in\mathbb{N}$ mit $\|\bar{y}-y_k\|_2<\delta$ für $k\geq K$.

Für $x\in[a,b]$ und $k\geq K$ gilt

$$\left\|\binom{x}{y_k}-\binom{x}{\bar{y}}\right\|_2\leq\|y_k-\bar{y}\|_2<\delta,\text{ also}$$

$$|F_k(x)-F(x)|=\left|f\binom{x}{y_k}-f\binom{x}{\bar{y}}\right|<\varepsilon.\qquad\square$$

9.2 Satz: Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^m$, $f : [a,b] \times U \to \mathbb{R}$ stetig.

Definiere $g : U \to \mathbb{R}$ durch $g(y) := \int_a^b f\binom{x}{y}\,dx$.

Dann ist g stetig.

Bew.: Sei $(y_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset U$ mit $y_k \xrightarrow{k \to \infty} \bar{y} \in U$.

Dann ist (mit F_k, F wie in 9.1)

$$g(y_k) = \int_a^b f\binom{x}{y_k}\,dx = \int_a^b F_k(x)\,dx$$

und

$$g(\bar{y}) = \int_a^b F(x)\,dx.$$

Nach 9.1 gilt $F_k \xrightarrow{k \to \infty} F$ glm. und nach Ana I, Satz 14.6

$$\lim_{k \to \infty} g(y_k) = \lim_{k \to \infty} \int_a^b F_k(x)\,dx = \int_a^b F(x)\,dx = g(\bar{y}).$$

$\overset{\text{Prop. 3.2}}{\Longrightarrow}$ g ist stetig. $\square$

9.3 Prop.: Seien $[a,b], [c,d] \subset \mathbb{R}$, $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig;

f sei stetig partiell differenzierbar nach der zweiten Variablen,

d.h. $\frac{\partial f}{\partial y}\binom{x}{y}$ existiert und ist stetig in $\binom{x}{y}$ für alle $\binom{x}{y}$.

Sei $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset [c,d]$ mit $y_k \xrightarrow{k\to\infty} \bar{y} \in [c,d]$ und $y_k \neq \bar{y}$, $k\in\mathbb{N}$.

Definiere $F_k, F : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch

$$F_k(x) := \frac{f\binom{x}{y_k} - f\binom{x}{\bar{y}}}{y_k - \bar{y}}, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$F(x) := \frac{\partial f}{\partial y}\binom{x}{\bar{y}}.$$

Dann gilt $F_k \xrightarrow{k\to\infty} F$ gleichmäßig.

Bew.: Sei $\varepsilon > 0$.

$\frac{\partial f}{\partial y} : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ ist stetig, also gleichmäßig stetig (4.13);

daher existiert $\delta > 0$ sodass für $y, y' \in [c,d]$ mit $|y - y'| < \delta$ gilt

$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\binom{x}{y} - \frac{\partial f}{\partial y}\binom{x}{y'}\right| < \varepsilon$ für alle $x \in [a,b]$.

Nach MWS existiert für $k\in\mathbb{N}$, $x\in[a,b]$ ein $\Theta_{k,x}$ zwischen $\bar{y}$ und y_k mit

$$F_k(x) = \frac{f\binom{x}{y_k} - f\binom{x}{\bar{y}}}{y_k - \bar{y}} = \frac{\partial f}{\partial y}\binom{x}{\Theta_{k,x}}.$$

Wegen $y_k \to \bar{y}$ existiert $N \in \mathbb{N}$ sodass $|\bar{y} - y_k| < \delta$ falls $k \geq N$.

Für $k \geq N$ gilt dann $|\bar{y} - \Theta_{k,x}| < \delta$, also

$$|F(x) - F_k(x)| = \left|\frac{\partial f}{\partial y}\binom{x}{\bar{y}} - \frac{\partial f}{\partial y}\binom{x}{\Theta_{k,x}}\right| < \varepsilon \text{ für alle } x \in [a,b]. \qquad \square$$

9.4 Satz: Seien $[a,b], [c,d] \subset \mathbb{R}$, $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig;
f sei stetig partiell differenzierbar nach der zweiten Variablen.
Definiere $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ durch $g(y) := \int_a^b f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} dx$.
Dann ist g stetig differenzierbar mit $\frac{dg}{dy}(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} dx$.

Bew.: Sei $\bar{y} \in [c,d]$, $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset [c,d]$ mit $y_k \xrightarrow{k\to\infty} \bar{y}$, $y_k \neq \bar{y}$, $k \in \mathbb{N}$.
Definiere $F_k, F : [a,b] \to \mathbb{R}$ ~~durch~~ wie in Prop. 9.3,
sodass $F_k \to F$ gleichmäßig. Dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} \frac{g(y_k) - g(\bar{y})}{y_k - \bar{y}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\int_a^b \left(f\begin{pmatrix}x\\y_k\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}x\\\bar{y}\end{pmatrix}\right) dx}{y_k - \bar{y}} = \lim_{k\to\infty} \int_a^b F_k(x)\, dx = \int_a^b F(x)\, dx$$

$$= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}\begin{pmatrix}x\\\bar{y}\end{pmatrix} dx. \quad \square$$

9.5 Satz (Fubini): Seien $[a,b], [c,d] \subset \mathbb{R}$, $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig.
Dann gilt

$$\int_c^d \left(\int_a^b f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} dy \right) dx.$$

(Die Funktionen $y \mapsto \int_a^b f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} dx$ und $x \mapsto \int_c^d f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} dy$ sind stetig nach 9.2,
daher existieren beide Seiten.)

Bew.: Definiere $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ durch $g(y) := \int_a^b \underbrace{\left(\int_c^y f\begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} ds \right)}_{\substack{\text{stetig bzgl. } x \text{ nach } 9.2; \\ \text{stetig differenzierbar bzgl. } y}} dx$.

Nach Satz 9.4 gilt

$$\frac{dg}{dy}(y) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_c^y f\begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} ds \right) dx = \int_a^b f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dx.$$

Wir erhalten

$$\int_c^d \left(\int_a^b f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dx \right) dy = \int_c^d \frac{dg}{dy}(y)\, dy = g(d) - \underbrace{g(c)}_{=0} = g(d) = \int_a^b \left(\int_c^d f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dy \right) dx. \qquad \square$$