8. Implizite Funktionen

"If I have done the public any service, it is due to my patient thought." Isaac Newton

8.1 Motivation: $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar

$N_F(c) = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid F\binom{x}{y} = c \right\}$

- Wo liegen Extrema von $F|_Z$?

- Wann ist $N_F(c)$ lokal von der Form $\left\{ \binom{x}{g(x)} \mid x \in I \right\}$ für ein $g: I \to \mathbb{R}$?

  M.a.W.: Wann lässt sich die Gleichung $F\binom{x}{g(x)} = c$ nach g auflösen?

- Was lässt sich über g sagen?

8.2 Satz: Seien $\underline{a} \in \mathbb{R}^k$, $\underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^m$, $r_1, r_2 > 0$,

$U_1 = B(\underline{a}, r_1) \subset \mathbb{R}^k$, $U_2 = B(\underline{b}, r_2) \subset \mathbb{R}^m$,

$F: U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}^m$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix} \mapsto F\begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix}$, eine Abbildung

mit $F\begin{pmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{pmatrix} = \underline{c}$. F sei in $\begin{pmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k+m}$ differenzierbar

und $\frac{\partial F}{\partial \underline{y}}\begin{pmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{pmatrix} \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$ sei invertierbar.

Es sei $g: U_1 \to U_2$ stetig mit $g(\underline{a}) = \underline{b}$ und

$F\begin{pmatrix} \underline{x} \\ g(\underline{x}) \end{pmatrix} = \underline{c}$ für alle $\underline{x} \in U_1$.

Dann ist g in $\underline{a}$ differenzierbar mit

$$Dg(\underline{a}) = -\left(\frac{\partial F}{\partial \underline{y}}\begin{pmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{pmatrix}\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \underline{x}}\begin{pmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{pmatrix}.$$

Dabei ist

$$\frac{\partial F}{\partial \underline{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_k} \end{pmatrix} \in M_{m \times k}(\mathbb{R}), \quad \frac{\partial F}{\partial \underline{y}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix} \in M_{m \times m}(\mathbb{R}),$$

also

$$DF = \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{x}}, \frac{\partial F}{\partial \underline{y}}\right) \in M_{m \times (k+m)}(\mathbb{R}).$$

Beweis: O.E. $\begin{pmatrix}\underline{a}\\ \underline{b}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k+m}$ (warum?).

F ist differenzierbar, d.h. für $\begin{pmatrix}\underline{x}\\ \underline{y}\end{pmatrix} \in U_1 \times U_2$ gilt

$$F\begin{pmatrix}\underline{x}\\ \underline{y}\end{pmatrix} = \underbrace{F\begin{pmatrix}\underline{a}\\ \underline{b}\end{pmatrix}}_{=\underline{c}} + \underbrace{DF\begin{pmatrix}\underline{a}\\ \underline{b}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\underline{x}\\ \underline{y}\end{pmatrix}}_{=\frac{\partial F}{\partial \underline{x}}\binom{0}{0}\underline{x} + \frac{\partial F}{\partial \underline{y}}\binom{0}{0}\underline{y}} + \varphi\begin{pmatrix}\underline{x}\\ \underline{y}\end{pmatrix},$$

wo $\varphi : \mathbb{R}^{k+m} \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung ist mit

$$\lim_{\substack{\binom{\underline{x}}{\underline{y}} \to 0\\ \binom{\underline{x}}{\underline{y}} \neq 0}} \frac{1}{\left\|\binom{\underline{x}}{\underline{y}}\right\|_2} \varphi\begin{pmatrix}\underline{x}\\ \underline{y}\end{pmatrix} = 0 . \qquad (*)$$

Dann gilt für $\underline{x} \in U_1$

$$\underline{c} = F\begin{pmatrix}\underline{x}\\ g(\underline{x})\end{pmatrix} = \underline{c} + \frac{\partial F}{\partial \underline{x}}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\underline{x} + \frac{\partial F}{\partial \underline{y}}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} g(\underline{x}) + \varphi\begin{pmatrix}\underline{x}\\ g(\underline{x})\end{pmatrix},$$

also

$$g(\underline{x}) = \underbrace{-\left(\frac{\partial F}{\partial \underline{y}}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \underline{x}}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}_{\text{lineare Abb.}: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m} \underline{x} \underbrace{- \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{y}}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right)^{-1} \varphi\begin{pmatrix}\underline{x}\\ g(\underline{x})\end{pmatrix}}_{=\psi(\underline{x})} \qquad (**)$$

Bleibt zu zeigen:

$$\frac{1}{\|\underline{x}\|_2} \|\psi(\underline{x})\|_2 \xrightarrow{\|\underline{x}\|_2 \to 0} 0 . \qquad (***)$$

Sei $0 < \varepsilon \leq 1$.

Setze $M := \left\|\left(\frac{\partial F}{\partial \underline{y}}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right)^{-1}\right\|$, $N := 2\left\|\left(\frac{\partial F}{\partial \underline{y}}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \underline{x}}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\| + 1$.

Wegen (1) existieren $0<\delta_1<r_1$, $0<\delta_2<r_2$ sodass für $\binom{\underline{x}}{\underline{y}} \in U_1 \times U_2$ mit $\|\underline{x}\|_2 < \delta_1$, $\|\underline{y}\|_2 < \delta_2$ gilt

$$\left\|\varphi\binom{\underline{x}}{\underline{y}}\right\|_2 \le \left\|\binom{\underline{x}}{\underline{y}}\right\|_2 \cdot \frac{1}{2M} \cdot \frac{\varepsilon}{1+N} \le \frac{\|\underline{x}\|_2 + \|\underline{y}\|_2}{2M} \cdot \frac{\varepsilon}{1+N}.$$

g stetig, $g(0)=0 \Rightarrow \exists\, 0<\delta<\delta_1$ sodass für $\|\underline{x}\|_2 < \delta$ gilt

$\|g(\underline{x})\|_2 < \delta_2$.

Für $\underline{x} \in U_1$ mit $\|\underline{x}\|_2 < \delta$ gilt daher

$$\left\|\varphi\binom{\underline{x}}{g(\underline{x})}\right\|_2 \le \frac{\|\underline{x}\|_2 + \|g(\underline{x})\|_2}{2M} \cdot \frac{\varepsilon}{1+N} \le \frac{\|\underline{x}\|_2 + \|g(\underline{x})\|_2}{2M}, \quad (****)$$

also

$$\|g(\underline{x})\|_2 \overset{(**)}{\le} \left\|\left(\frac{\partial f}{\partial \underline{y}}\binom{0}{0}\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial \underline{x}}\binom{0}{0}\right\| \cdot \|\underline{x}\|_2 + M \cdot \left\|\varphi\binom{\underline{x}}{g(\underline{x})}\right\|_2$$

$$\overset{(****)}{\le} \left\|\left(\frac{\partial f}{\partial \underline{y}}\binom{0}{0}\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial \underline{x}}\binom{0}{0}\right\| \cdot \|\underline{x}\|_2 + \frac{\|\underline{x}\|_2}{2} + \frac{\|g(\underline{x})\|_2}{2}.$$

Es folgt $\frac{1}{2}\|g(\underline{x})\|_2 \le \left(\left\|\left(\frac{\partial f}{\partial \underline{y}}\binom{0}{0}\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial \underline{x}}\binom{0}{0}\right\| + \frac{1}{2}\right)\|\underline{x}\|_2$,

also $\|g(\underline{x})\|_2 \le N\|\underline{x}\|_2 \quad (*****)$ für $\underline{x}$ mit $\|\underline{x}\|_2 < \delta$.

Wir erhalten für $0 < \|\underline{x}\|_2 < \delta$

$$\frac{1}{\|\underline{x}\|_2}\|f(\underline{x})\|_2 \overset{(**)}{\le} \frac{M}{\|\underline{x}\|_2} \cdot \left\|\varphi\binom{\underline{x}}{g(\underline{x})}\right\|_2 \overset{(****),(*****)}{\le} \frac{M}{\|\underline{x}\|_2} \cdot \frac{\|\underline{x}\|_2 \cdot (1+N)}{2M} \cdot \frac{\varepsilon}{1+N} < \varepsilon.$$

$\Rightarrow (***)$. $\square$

8.3 Satz: Seien $\underline{a} \in U_1 \underset{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{R}^k$, $\underline{b} \in U_2 \underset{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{R}^m$, $\underline{c} \in \mathbb{R}^m$,

$F : U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar so dass

$F\begin{pmatrix}\underline{a}\\ \underline{b}\end{pmatrix} = \underline{c}$ und $\frac{\partial F}{\partial \underline{y}}\begin{pmatrix}\underline{a}\\ \underline{b}\end{pmatrix} \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ invertierbar ist.

Dann existieren $\underline{a} \in V_1 \underset{\text{offen}}{\subseteq} U_1$, $\underline{b} \in V_2 \underset{\text{offen}}{\subseteq} U_2$ und

$g : V_1 \to V_2$ stetig differenzierbar mit $D_g \cancel{f}(\underline{a}) = -\left(\frac{\partial F}{\partial \underline{y}}\begin{pmatrix}\underline{a}\\ \underline{b}\end{pmatrix}\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \underline{x}}\begin{pmatrix}\underline{a}\\ \underline{b}\end{pmatrix}$

und $N_F(\underline{c}) \cap (V_1 \times V_2) = \left\{ \begin{pmatrix}\underline{x}\\ g(\underline{x})\end{pmatrix} \;\middle|\; \underline{x} \in V_1 \right\}$,

wo $N_F(\underline{c}) = \left\{ \begin{pmatrix}\underline{x}\\ \underline{y}\end{pmatrix} \in U_1 \times U_2 \;\middle|\; F\begin{pmatrix}\underline{x}\\ \underline{y}\end{pmatrix} = \underline{c} \right\}$. (Insbesondere gilt $F\begin{pmatrix}\underline{x}\\ g(\underline{x})\end{pmatrix} = \underline{c}$ für $\underline{x} \in V_1$.)

Bew. 1 O.E. $\begin{pmatrix}\underline{a}\\ \underline{b}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k+m}$.

Definiere $G : U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}^m$ durch

$$G\begin{pmatrix}\underline{x}\\ \underline{y}\end{pmatrix} := \underline{y} - \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{y}}\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\right)^{-1}\left(F\begin{pmatrix}\underline{x}\\ \underline{y}\end{pmatrix} - \underline{c}\right), \qquad (1)$$

dann ist G stetig differenzierbar und

$$\frac{\partial G}{\partial \underline{y}}\begin{pmatrix}\underline{x}\\ \underline{y}\end{pmatrix} = \underbrace{\mathbb{1}_m}_{\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}} - \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{y}}\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \underline{y}}\begin{pmatrix}\underline{x}\\ \underline{y}\end{pmatrix} \quad \text{(warum?)},$$

also

$$\frac{\partial G}{\partial \underline{y}}\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} = \mathbb{1}_m - \mathbb{1}_m = 0.$$

$\frac{\partial G}{\partial \underline{y}}$ ist stetig, daher existieren $0 \in W_1 \underset{\text{offen}}{\subseteq} U_1$, $0 \in W_2 \underset{\text{offen}}{\subseteq} U_2$

so dass für $\binom{\underline{x}}{\underline{y}} \in W_1 \times W_2$ gilt

$$\left\| \frac{\partial G}{\partial \underline{y}} \binom{\underline{x}}{\underline{y}} \right\| \leq \frac{1}{2}. \tag{11}$$

$0 \in W_2 \underset{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{R}^m \Rightarrow \exists\, r > 0$ mit $V_2 := B(0, r) \subset W_2$.

Wegen $G\binom{0}{0} = 0$ existiert $0 \in V_1 \underset{\text{offen}}{\subseteq} W_1$ mit

$$\alpha := \sup \left\{ \left\| G\binom{\underline{x}}{0} \right\|_2 \;\middle|\; \underline{x} \in V_1 \right\} < \frac{r}{2}.$$

Wir definieren induktiv stetige Abbildungen

$$g_j : V_1 \to V_2, \quad j \in \mathbb{N}$$

mit (i) $g_0(\underline{x}) = 0, \quad \underline{x} \in V_1$

(ii) $\sup \{ \| g_{j+1}(\underline{x}) - g_j(\underline{x}) \|_2 \mid \underline{x} \in V_1 \} \leq 2^{-j} \cdot \alpha, \quad j \in \mathbb{N}$

(iii) $g_{j+1}(\underline{x}) = G \binom{\underline{x}}{g_j(\underline{x})}, \quad \underline{x} \in V_1.$

IA: $g_0 \equiv 0$ gegeben durch (i).

IS: Seien $g_0, \dots, g_\ell : V_1 \to V_2$ stetig definiert so dass (ii), (iii) für $j \in \{0, \dots, \ell-1\}$ gelten.

Für $\underline{x} \in V_1$ haben wir

$$\| g_\ell(\underline{x}) \|_2 = \left\| \sum_{j=0}^{\ell-1} g_{j+1}(\underline{x}) - g_j(\underline{x}) \right\|_2 \leq \sum_{j=0}^{\ell-1} \| g_{j+1}(\underline{x}) - g_j(\underline{x}) \| \overset{(ii)}{\leq} \sum_{j=0}^{\ell-1} 2^{-j} \alpha \leq 2\alpha < r,$$

also $g_\ell(V_1) \subset V_2$ und wir können

$g_{\ell+1} : V_1 \to \mathbb{R}^m$ durch (iii) definieren.

Müssen noch zeigen: $g_{l+1}(V_1) \subset V_2$,

(ii) mit l an Stelle von j, g_{l+1} ist stetig.

Nach Satz 7.11 (Mittelwertsatz) gilt für $\underline{x} \in V_1$, $\underline{y}', \underline{y}'' \in V_2$

$$\left\| G\binom{\underline{x}}{\underline{y}'} - G\binom{\underline{x}}{\underline{y}''} \right\|_2 \le \sup_{\underline{y} \in V_2} \left\| \frac{\partial G}{\partial \underline{y}}\binom{\underline{x}}{\underline{y}} \right\| \cdot \|\underline{y}' - \underline{y}''\|_2 , \quad (***)$$

also

$$\|g_{l+1}(\underline{x}) - g_l(\underline{x})\|_2 = \left\| G\binom{\underline{x}}{g_l(\underline{x})} - G\binom{\underline{x}}{g_{l-1}(\underline{x})} \right\|_2$$

$$\overset{(***);(**)}{\le} \frac{1}{2} \cdot \|g_l(\underline{x}) - g_{l-1}(\underline{x})\|_2 \overset{(ii)}{\le} \frac{1}{2} \cdot 2^{-(l-1)} \cdot \alpha = 2^{-l} \cdot \alpha$$

und so gilt (ii) mit $l = j$.

Weiter gilt für $\underline{x} \in V_1$

$$\|g_{l+1}(\underline{x})\|_2 \le \sum_{j=0}^{l} \|g_{j+1}(\underline{x}) - g_j(\underline{x})\|_2 \le \sum_{j=0}^{l} 2^{-j} \cdot \alpha \le 2\alpha < r,$$

also $g_{l+1}(V_1) \subset B(0, r) = V_2$.

g_{l+1} ist stetig wegen (iii) und Stetigkeit von G, g_l.

Induktion liefert nun g_j, $j \in \mathbb{N}$ wie gewünscht.

Nach Ana I Satz 14.5 konv. $\sum_{j=0}^{\infty} g_{j+1} - g_j$ absolut und gleichmäßig gegen $g: V_1 \to \mathbb{R}^m$ (wende Ana I 14.5 auf jede Koordinate einzeln an); nach Ana I Satz 14.4 ist g stetig (in jeder Koordinate glm. Limes von stetigen Funktionen).

Es gilt für $\underline{x} \in V_1$ $\|g(\underline{x})\|_2 \le \sum_{j=0}^{\infty} \|g_{j+1}(\underline{x}) - g_j(\underline{x})\|_2 \overset{(ii)}{\le} 2\alpha < r$,

also $g(V_1) \subset V_2$. Wegen (iii) und Stetigkeit von g, g_j und G gilt

$g(\underline{x}) = \lim_j g_{j+1}(x) = \lim_j G\binom{\underline{x}}{g_j(\underline{x})} = G\binom{\underline{x}}{\lim_j g_j(\underline{x})} = G\binom{\underline{x}}{g(\underline{x})}$,

und wegen (*) $F\binom{\underline{x}}{g(\underline{x})} = \underline{c}$, also $\left\{ \binom{\underline{x}}{g(\underline{x})} \,\middle|\, \underline{x} \in V_1 \right\} \subset N_F(\underline{c}) \cap V_1 \times V_2$.

Sei nun $\binom{\underline{x}}{\underline{y}} \in N_f(\underline{c}) \cap V_1 \times V_2$, dann gilt nach (a) $G\binom{\underline{x}}{\underline{y}} = \underline{y}$ und

$$\|\underline{y} - g(\underline{x})\|_2 = \left\|G\binom{\underline{x}}{\underline{y}} - G\binom{\underline{x}}{g(\underline{x})}\right\|_2 \overset{(\ast\ast\ast),(\ast\ast)}{\leq} \frac{1}{2} \cdot \|\underline{y} - g(\underline{x})\|_2 ,$$

also $\|\underline{y} - g(\underline{x})\|_2 = 0$. Es folgt $N_f(\underline{c}) \cap V_1 \times V_2 \subset \left\{\binom{\underline{x}}{g(\underline{x})} \mid \underline{x} \in V_1\right\}$.

Satz 8.2 $\Rightarrow$ g ist differenzierbar in $\underline{a} \in \mathbb{R}^k$ mit

$$Dg(\underline{a}) = -\left(\frac{\partial f}{\partial \underline{y}}\binom{\underline{a}}{\underline{b}}\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial \underline{x}}\binom{\underline{a}}{\underline{b}}.$$

g stetig differenzierbar: Verkleinern V_1, V_2 sodass

$\frac{\partial f}{\partial \underline{y}}\binom{\tilde{\underline{a}}}{\tilde{\underline{b}}}$ invertierbar ist für alle $\binom{\tilde{\underline{a}}}{\tilde{\underline{b}}} \in V_1 \times V_2$. Dann Übung. $\square$

(vgl. Ana I, Satz 12.6)

8.4 <u>Corollar</u> (Satz von der Umkehrabbildung):

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar.

Sei $\underline{b} \in U$ sodass $Df(\underline{b})$ invertierbar ist.

Dann existiert $\underline{b} \in V \underset{\text{offen}}{\subseteq} U$ und $f(\underline{b}) \in W \underset{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{R}^n$

sodass $f|_V : V \to W$ bijektiv ist und die Umkehrabbildung

$f^{-1}: W \to V$ stetig differenzierbar ist mit

$$D(f^{-1})(f(\underline{b})) = (Df(\underline{b}))^{-1}.$$

Bew.: Definiere $F: \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n$ durch

$$F\begin{pmatrix}\underline{x}\\ \underline{y}\end{pmatrix} := \underline{x} - f(\underline{y}).$$

Dann gilt $F\begin{pmatrix}f(\underline{b})\\ \underline{b}\end{pmatrix} = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial \underline{y}}\begin{pmatrix}\underline{x}\\ \underline{y}\end{pmatrix} = -Df(\underline{y})$, $\underline{y} \in U$,

und $\frac{\partial F}{\partial \underline{y}}\begin{pmatrix}f(\underline{b})\\ \underline{b}\end{pmatrix}$ ist invertierbar.

Nach Satz 8.3 (mit $\underline{a} = f(\underline{b})$, $\underline{c} = 0$) existieren

$f(\underline{b}) \in W \underset{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{R}^n$, $\underline{b} \in V' \underset{\text{offen}}{\subseteq} U$ und $g: W \to V'$

stetig differenzierbar mit

$$Dg(f(\underline{b})) = -\left(\frac{\partial F}{\partial \underline{y}}\begin{pmatrix}f(\underline{b})\\ \underline{b}\end{pmatrix}\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \underline{x}}\begin{pmatrix}f(\underline{b})\\ \underline{b}\end{pmatrix} = (Df(\underline{b}))^{-1} \cdot \mathbb{1}_n = (Df(\underline{b}))^{-1}$$

und

$$\left\{\begin{pmatrix}\underline{x}\\ g(\underline{x})\end{pmatrix} \,\middle|\, \underline{x} \in W\right\} = N_F(0) \cap (W \times V') = \left\{\begin{pmatrix}\underline{x}\\ \underline{y}\end{pmatrix} \in W \times V' \,\middle|\, \underline{x} = f(\underline{y})\right\}.$$

"$\subset$" $\Rightarrow$ $\forall \underline{x} \in W: \underline{x} = f(g(\underline{x}))$.

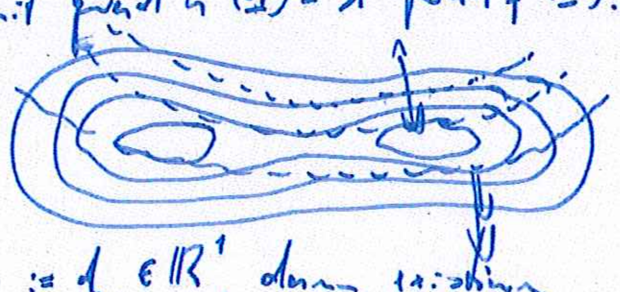
Setze $V := \underbrace{V' \cap f^{-1}(W)}_{\{\underline{y} \in V' \mid f(\underline{y}) \in W\}} \underset{\text{offen}}{\subseteq} U$, dann ist $f(V) \subset W$ und $g(W) \subset V$.

Für $\underline{y} \in V$ gilt $\begin{pmatrix}f(\underline{y})\\ \underline{y}\end{pmatrix} \in W \times V'$, also wegen "$\supset$" $\underline{y} = g(f(\underline{y}))$.

$\Rightarrow f: V \to W$ ist bijektiv mit $g = f^{-1}$. $\square$

8.5 Corollar (Lagrangemultiplikatoren):

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und
$\underline{d} \in M := \{\underline{x} \in U \mid f(\underline{x}) = 0\}$ mit $\operatorname{grad} f(\underline{d}) \neq 0$.
Sei $h: U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar sodass
$h|_M : M \to \mathbb{R}$ ein lokales Extremum in $\underline{d}$ besitzt.
Dann existiert $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad} h(\underline{d}) = \lambda \cdot \operatorname{grad} f(\underline{d})$.



Bew.: O.E. sei $\frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{d}) \neq 0$.
Setze $\underline{a} := \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\underline{b} := d_n \in \mathbb{R}^1$, dann existieren
$\underline{a} \in U_1 \underset{\text{off}}{\subset} \mathbb{R}^{n-1}$, $\underline{b} \in U_2 \underset{\text{off}}{\subset} \mathbb{R}$ mit $U_1 \times U_2 \subset U$.
Nach Satz 8.3 mit $F = f|_{U_1 \times U_2} : U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}$ (es ist $\frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{d})$
invertierbar) existieren $\underline{a} \in V_1 \underset{\text{off}}{\subset} U_1$, $\underline{b} \in V_2 \underset{\text{off}}{\subset} U_2$ und
$g: V_1 \to V_2$ stetig differenzierbar mit $f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ g(x_1, \dots, x_{n-1}) \end{pmatrix} = 0$ für $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in V_1$,
d.h. $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ g(x_1, \dots, x_{n-1}) \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in V_1 \right\} \subset M$, sowie $\underline{b} = g(\underline{a})$.
Dann gilt für $i \in \{1, \dots, n-1\}$: $0 = \frac{\partial f}{\partial x_i}\begin{pmatrix} \underline{a} \\ g(\underline{a}) \end{pmatrix} + \frac{\partial f}{\partial x_n}\begin{pmatrix} \underline{a} \\ g(\underline{a}) \end{pmatrix} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(\underline{a})$. (*)
Definiere $H: V_1 \to \mathbb{R}$ durch $H\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} := h\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ g(x_1, \dots, x_{n-1}) \end{pmatrix}$.
$h|_M$ besitzt in $\underline{d} = \begin{pmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{a} \\ g(\underline{a}) \end{pmatrix}$ ein lokales Extremum, also auch H in $\underline{a}$.
Es folgt für $i \in \{1, \dots, n-1\}$: $0 = \frac{\partial H}{\partial x_i}(\underline{a}) = \frac{\partial h}{\partial x_i}\begin{pmatrix} \underline{a} \\ g(\underline{a}) \end{pmatrix} \cdot 1 + \frac{\partial h}{\partial x_n}\begin{pmatrix} \underline{a} \\ g(\underline{a}) \end{pmatrix} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(\underline{a})$. (**)
Setze $\lambda := \frac{\partial h}{\partial x_n}\begin{pmatrix} \underline{a} \\ g(\underline{a}) \end{pmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\begin{pmatrix} \underline{a} \\ g(\underline{a}) \end{pmatrix} \right)^{-1}$ (***), dann folgt aus (*), (**) und (***)
$\frac{\partial h}{\partial x_i}\begin{pmatrix} \underline{a} \\ g(\underline{a}) \end{pmatrix} = \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}\begin{pmatrix} \underline{a} \\ g(\underline{a}) \end{pmatrix}$, $i \in \{1, \dots, n\}$. □

8.6 Bsp.: (i) Sei $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch,

$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch $h(\underline{x}) = \langle \underline{x}, A\underline{x} \rangle = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$,

$M := S^{n-1} = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\underline{x}\|_2 = 1 \} = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\underline{x}) = 0 \}$ mit $f(\underline{x}) = \langle \underline{x}, \underline{x} \rangle - 1$

M ist kompakt $\Rightarrow$ $h|_M$ nimmt in $\underline{\xi}_{\max}$ $(\underline{\xi}_{\min})$ Maximum (Minimum) an.

Es ist $\frac{\partial f}{\partial x_l}(\underline{x}) = 2x_l$, also $\operatorname{grad} f(\underline{x}) = 2\underline{x} \neq 0$ für $\underline{x} \in M$.

$$\frac{\partial h}{\partial x_l}(\underline{x}) = \frac{\partial}{\partial x_l}\Big(\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j\Big) = \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial x_i}{\partial x_l} x_j + \sum_{i,j} a_{ij} x_i \frac{\partial x_j}{\partial x_l}$$

$$= \sum_j a_{lj} x_j + \sum_i a_{il} x_i \overset{a_{ij} = a_{ji}}{=} 2 \sum_i a_{li} x_i = 2(A\underline{x})_l .$$

Cor. 8.5 $\Rightarrow \exists\, \lambda_{\max\,(\min)} \in \mathbb{R} : 2 \cdot \lambda \cdot \underline{\xi}_{\max\,(\min)} = \lambda \operatorname{grad} f(\underline{\xi}_{\max\,(\min)}) = \operatorname{grad} h(\underline{\xi}_{\max\,(\min)})$
$= 2A\underline{\xi}_{\max\,(\min)}$

$\Rightarrow \underline{\xi}_{\max\,(\min)}$ ist EV von A zum EW $\lambda_{\max\,(\min)} = \lambda_{\max\,(\min)} \langle \underline{\xi}_{\max\,(\min)}, \underline{\xi}_{\max\,(\min)} \rangle$
$= \langle \underline{\xi}_{\max\,(\min)}, A\underline{\xi}_{\max\,(\min)} \rangle = h(\underline{\xi}_{\max\,(\min)})$

$\leadsto$ A besitzt mind. einen reellen EW

$\leadsto$ A ist diagonalisierbar.

(ii) $f: \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ Polarkoordinaten

$$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \cos\varphi \\ r \sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$Df\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r}\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi}\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r}\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi}\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\cdot\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cdot\cos\varphi \end{pmatrix},$$

$\det\left(Df\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}\right) = r \neq 0 \Rightarrow Df\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}$ ist invertierbar mit

$$\left(Df\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}\right)^{-1} = \frac{1}{r}\cdot\begin{pmatrix} r\cdot\cos\varphi & r\cdot\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\frac{1}{r}\cdot\sin\varphi & \frac{1}{r}\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\parallel$$

$$D(f^{-1})\left(f\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}\right) = D(f^{-1})\begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}, \text{ also}$$

$$D(f^{-1})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}. \quad (*)$$

Für $r > 0$, $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ lässt sich f^{-1} explizit angeben:

$$f^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2} \\ \arctan\frac{y}{x} \end{pmatrix}$$

(*) lässt sich dann direkt überprüfen, z. B.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\arctan\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$