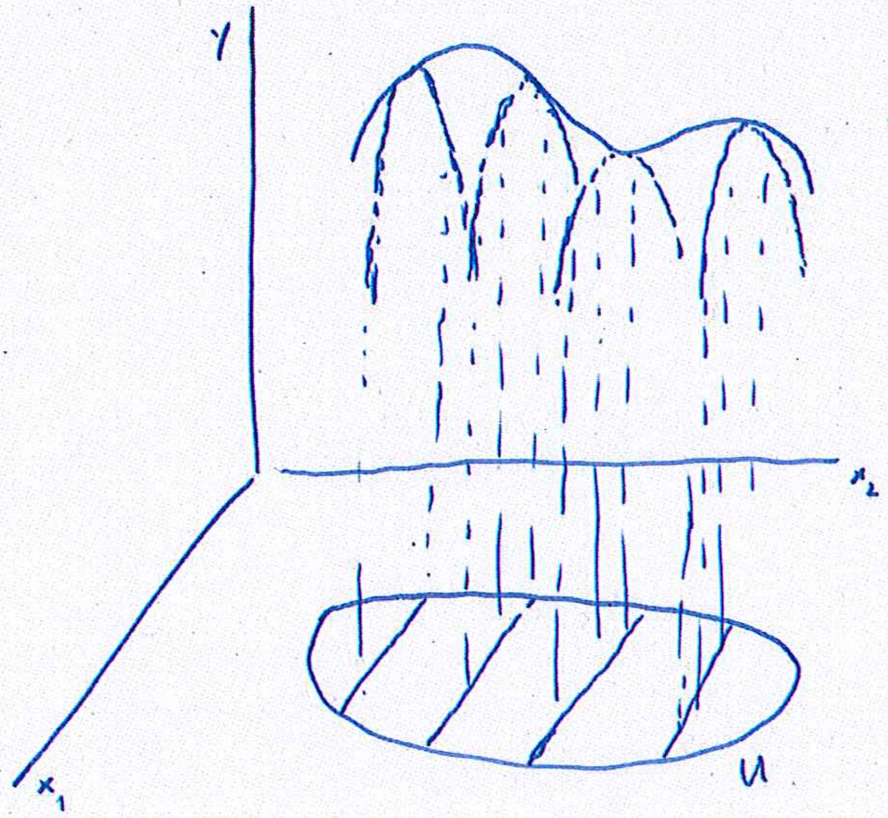
6. Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$

„Ein Element des Erfolgs, egal in welchem Beruf, ist die Liebe zum Handwerk."

Irène Joliot-Curie

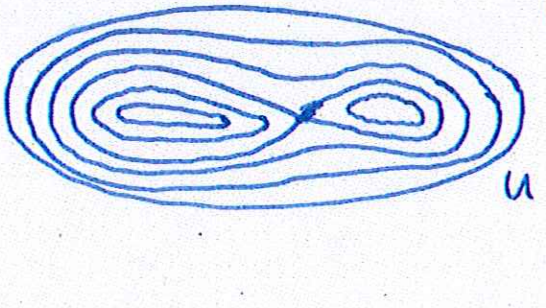
$U \subset \mathbb{R}^2$,

$f: U \to \mathbb{R}$



'Höhenlinien'

$N_f(c) = \{ \underline{x} \in U \mid f(\underline{x}) = c \}$



6.1 Def.: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ und $f: U \to \mathbb{R}$ eine Abbildung.

a) Für $\underline{x} \in U$, $i \in \{1, \dots, n\}$ heißt f partiell differenzierbar in $\underline{x}$ bezüglich der i-ten Koordinate, falls gilt:

(i) Es gibt eine Folge $(h_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ mit
$\lim\limits_{k \to \infty} h_k = 0$ und $\underline{x} + h_k \cdot \underline{e}_i \in U$, $k \in \mathbb{N}$.

(ii) Der Limes
$$D_i f(\underline{x}) := \lim_{h \to 0} \frac{f(\underline{x} + h \cdot \underline{e}_i) - f(\underline{x})}{h} \in \mathbb{R}$$
existiert.

Dabei bezeichnet $\underline{e}_i = (0, \dots, \underset{i}{1}, \dots, 0)$ den i-ten Einheitsvektor.
Wir schreiben auch $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x})$ für $D_i f(\underline{x})$.

b) f heißt partiell differenzierbar, falls f für jedes $\underline{x} \in U$ und $i \in \{1, \dots, n\}$ partiell differenzierbar ist.
f heißt stetig partiell differenzierbar, falls außerdem
$$D_i f: U \to \mathbb{R}, \quad \underline{x} \mapsto D_i f(\underline{x})$$
für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ stetig ist.
Der Gradient von f in $\underline{x}$ ist
$$\operatorname{grad} f(\underline{x}) = (D_1 f(\underline{x}), \dots, D_n f(\underline{x})) \in \mathbb{R}^n.$$
Wir schreiben auch $\nabla f(\underline{x})$ für $\operatorname{grad} f(\underline{x})$.

6.2 __Bem.:__ (i) Bedingung 6.1 a)(i) ist automatisch erfüllt, falls $U \subset \mathbb{R}^n$ offen ist. (warum?)

(ii) Für $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ definieren $f_i : U_i \to \mathbb{R}$ durch

$$f_i(\xi) := f(x_1, \dots, \xi, \dots, x_n), \text{ wo}$$

$$U_i := U \cap \{(x_1, \dots, \xi, \dots, x_n) \mid \xi \in \mathbb{R}\};$$

es gilt

$$D_i f(\underline{x}) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0, \\ x_i + h \in U_i}} \frac{f_i(x_i + h) - f_i(x_i)}{h} = f_i'(x_i).$$

6.3 __Def.:__ Ein Vektorfeld auf $U \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung

$$\underline{v} : U \to \mathbb{R}^n.$$

$\underline{v}$ heißt partiell differenzierbar, falls alle Komponenten $v_1, \dots, v_n : U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar sind.

In diesem Fall heißt

$$\operatorname{div} \underline{v} := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} : U \to \mathbb{R}$$

die Divergenz von $\underline{v}$.

Wir schreiben auch $\operatorname{div} \underline{v} = \langle \nabla, \underline{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} D_i v_i$.

6.4 z.B.: (i) Betrachte $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $r(\underline{x}) := \|\underline{x}\|_2$.

Niveaumengen sind $N_r(c) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid r(\underline{x}) = c\}$,

für $c > 0$ also Sphären vom Radius c.

r ist auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ stetig partiell differenzierbar:

Für $0 \neq \underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ definiere $r_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$r_i(\xi) = r((x_1, \dots, \xi, \dots, x_n)) = (x_1^2 + \dots + \xi^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$,

dann ist

$$\frac{\partial r}{\partial x_i}(\underline{x}) \overset{6.2(ii)}{=} r_i'(x_i) = 2x_i \cdot \frac{1}{2}(x_1^2 + \dots + x_i^2 + \dots + x_n^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x_i}{r(\underline{x})}.$$

(ii) Sei r wie oben und $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

Dann ist $f \circ r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar

mit $$\frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ r)(\underline{x}) \underset{(\text{warum?})}{=} f'(r(\underline{x}))\frac{\partial r}{\partial x_i}(\underline{x}) = f'(r(\underline{x})) \cdot \frac{x_i}{r(\underline{x})}.$$

(iii) Sei $n \geq 2$. Definiere $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$g(\underline{x}) := \begin{cases} \dfrac{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}{r(\underline{x})^{2n}}, & \text{falls } \underline{x} \neq 0 \\ 0, & \text{falls } \underline{x} = 0. \end{cases}$$

g ist auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ partiell differenzierbar mit

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(\underline{x}) = x_1 \cdot \ldots \cdot x_{i-1} \cdot x_{i+1} \cdot \ldots \cdot x_n \cdot r(\underline{x})^{-2n} + x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot (-2n)\, r(\underline{x})^{-2n-1} \cdot \frac{x_i}{r(\underline{x})}.$$

g ist in 0 partiell differenzierbar mit

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(0) \overset{6.1(ii)}{=} \lim_{h \to 0} \frac{\overbrace{g(0 + h \cdot \underline{e}_i)}^{=0} - \overbrace{g(0)}^{=0}}{h} = 0.$$

D.h. g ist auf $\mathbb{R}^n$ partiell differenzierbar.

g ist aber nicht stetig in 0:

Es gilt $\underbrace{\left(\frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k}\right)}_{\in \mathbb{R}^n} \xrightarrow{k\to\infty} 0$,

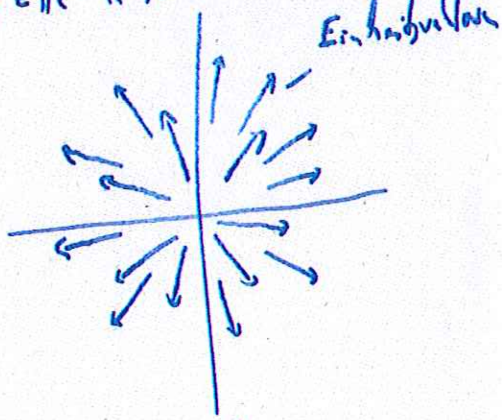
aber

$$g\left(\left(\frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k}\right)\right) = \frac{\frac{1}{k^n}}{\left(n \cdot \frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}\cdot 2n}} = \left(\frac{k}{n}\right)^n \xrightarrow{k\to\infty} \infty .$$

D.h. partiell differenzierbar $\not\Rightarrow$ stetig.

(iv) $U \subset \mathbb{R}^n$, $f: U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar, dann ist $\operatorname{grad} f : U \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld.

Es gilt $\operatorname{grad} r(\underline{x}) = \frac{1}{r(\underline{x})} \cdot \underline{x}$ für $\underline{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.



(v) $$\operatorname{div}(\operatorname{grad} r)(\underline{x}) = \operatorname{div}\left(\frac{1}{r(\underline{x})} \cdot \underline{x}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r(\underline{x})} \cdot x_i\right) = \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{r(\underline{x})}\right) \cdot x_i + \frac{1}{r(\underline{x})} \cdot 1\right)$$

$$\overset{6.4(ii)}{=} \sum_{i=1}^n -\frac{1}{r(\underline{x})^2} \cdot \frac{x_i}{r(\underline{x})} \cdot x_i + \frac{n}{r(\underline{x})} = -\frac{1}{r(\underline{x})} + \frac{n}{r(\underline{x})}$$

$$= \frac{(n-1)}{r(\underline{x})} .$$

Formaler (vgl. mit Produktregel):

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{r(\underline{x})} \cdot \underline{x}\right) = \langle \underbrace{\nabla \frac{1}{r(\underline{x})}}_{= -\frac{1}{r(\underline{x})^3} \cdot \underline{x}}, \underline{x} \rangle + \frac{1}{r(\underline{x})} \cdot \underbrace{\operatorname{div} \underline{x}}_{= n} .$$

Allgemeiner: $\nabla(f \cdot \underline{v}) = \langle \nabla f, \underline{v} \rangle + f \langle \nabla, \underline{v} \rangle$

6.5 Def.: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ und $f: U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar.

f heißt zweimal partiell differenzierbar, falls alle partiellen Ableitungen $D_i f: U \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, wieder partiell differenzierbar sind.

Induktiv definieren wir:

f heißt $(k+1)$-mal partiell differenzierbar, falls f k-mal partiell differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen k-ter Ordnung

$$D_{i_k} \dots D_{i_1} f : U \to \mathbb{R}, \quad i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\},$$

partiell differenzierbar sind.

f heißt k-mal stetig partiell differenzierbar, falls f k-mal partiell differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen der Ordnung $\leq k$ stetig sind.

Wir schreiben auch

$$D_{i_k} \dots D_{i_1} f = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}}, \quad D_i D_i f = D_i^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

6.6 **Satz:** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Dann gilt für $\underline{a} \in U$, $i,j \in 1,\dots,n$,

$$D_i D_j f(\underline{a}) = D_j D_i f(\underline{a}).$$

Bew.: O.E. $n=2$, $i=1$, $j=2$. (warum?)

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen $\Rightarrow \exists \delta > 0 : [a_1-\delta, a_1+\delta] \times [a_2-\delta, a_2+\delta] \subset U$.

Betrachte $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in [a_1-\delta, a_1+\delta] \times [a_2-\delta, a_2+\delta]$, $\bar{x}_1 \neq a_1$, $\bar{x}_2 \neq a_2$.

Definiere $F: [a_1-\delta, a_1+\delta] \to \mathbb{R}$ durch

$$F(x_1) := f(x_1, \bar{x}_2) - f(x_1, a_2).$$

Nach MWS existiert ξ zwischen $\bar{x}_1$ und a_1 mit

$$\underbrace{F(\bar{x}_1) - F(a_1)}_{= f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) - f(\bar{x}_1, a_2) - f(a_1, \bar{x}_2) + f(a_1, a_2)} = (\bar{x}_1 - a_1)\, F'(\xi) = (\bar{x}_1 - a_1)(D_1 f(\xi, \bar{x}_2) - D_1 f(\xi, a_2))$$

Definiere $G: [a_2-\delta, a_2+\delta] \to \mathbb{R}$ durch

$$G(x_2) := D_1 f(\xi, x_2).$$

Nach MWS existiert η zwischen $\bar{x}_2$ und a_2 mit

$$\underbrace{G(\bar{x}_2) - G(a_2)}_{= D_1 f(\xi, \bar{x}_2) - D_1 f(\xi, a_2)} = \underbrace{(\bar{x}_2 - a_2) \cdot G'(\eta)}_{= (\bar{x}_2 - a_2) D_2 D_1 f(\xi, \eta)}$$

Es folgt

$$f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) - f(\bar{x}_1, a_2) - f(a_1, \bar{x}_2) + f(a_1, a_2) = (\bar{x}_1 - a_1)(\bar{x}_2 - a_2)\, D_2 D_1 f(\xi, \eta).$$

Definieren nun $\tilde F : [a_2-\delta, a_2+\delta] \to \mathbb{R}$ durch

$$\tilde F(x_2) := f(\bar x_1, x_2) - f(a_1, x_2).$$

Nach MWS existiert $\tilde\eta$ zwischen $\bar x_2$ und a_2 mit

$$\begin{array}{ccc} \tilde F(\bar x_2) - \tilde F(a_2) & = & (\bar x_2 - a_2)\, \tilde F'(\tilde\eta) \\ \| & & \| \\ f(\bar x_1, \bar x_2) - f(a_1, \bar x_2) - f(\bar x_1, a_2) + f(a_1, a_2) & & (\bar x_2 - a_2)\big(D_2 f(\bar x_1, \tilde\eta) - D_2 f(a_1, \tilde\eta)\big) \end{array}$$

Definieren $\tilde G : [a_1-\delta, a_1+\delta] \to \mathbb{R}$ durch

$$\tilde G(x_1) := D_2 f(x_1, \tilde\eta).$$

Nach MWS existiert $\tilde\xi$ zwischen $\bar x_1$ und a_1 mit

$$\begin{array}{ccc} \tilde G(\bar x_1) - \tilde G(a_1) & = & (\bar x_1 - a_1)\, \tilde G'(\tilde\xi) \\ \| & & \| \\ D_2 f(\bar x_1, \tilde\eta) - D_2 f(a_1, \tilde\eta) & & (\bar x_1 - a_1)\, D_1 D_2 f(\tilde\xi, \tilde\eta) \end{array}$$

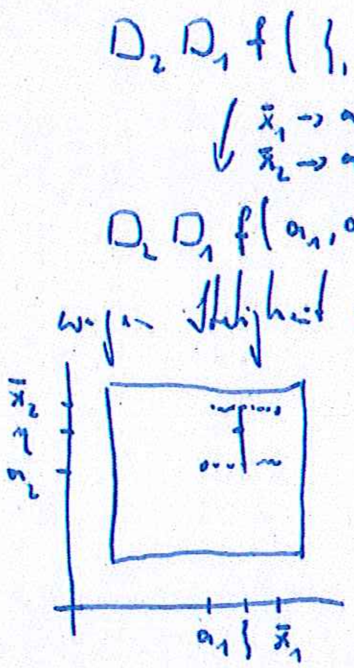
Es folgt

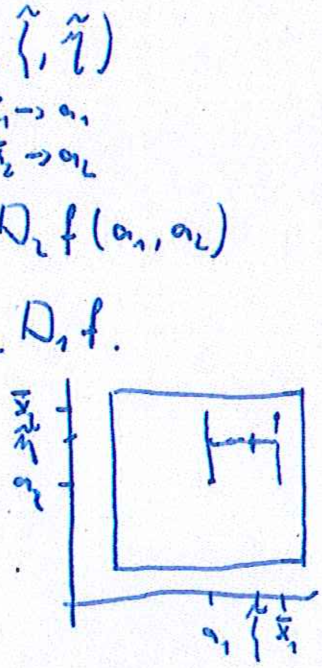
$$f(\bar x_1, \bar x_2) - f(a_1, \bar x_2) - f(\bar x_1, a_2) + f(a_1, a_2) = (\bar x_2 - a_2)(\bar x_1 - a_1)\, D_1 D_2 f(\tilde\xi, \tilde\eta),$$

also

$$\begin{array}{ccc} D_2 D_1 f(\xi, \eta) & = & D_1 D_2 f(\tilde\xi, \tilde\eta) \\ \Big\downarrow {\scriptstyle \bar x_1 \to a_1,\ \bar x_2 \to a_2} & & \Big\downarrow {\scriptstyle \bar x_1 \to a_1,\ \bar x_2 \to a_2} \\ D_2 D_1 f(a_1, a_2) & & D_1 D_2 f(a_1, a_2) \end{array}$$

wegen Stetigkeit von $D_1 D_2 f$, $D_2 D_1 f$.





$\square$

6.7 z.B.: (i) Sei $U \subset \mathbb{R}^3$, $\underline{v}: U \to \mathbb{R}^3$ ein partiell differenzierbares Vektorfeld. Wir definieren ein Vektorfeld

$$\operatorname{rot} \underline{v} : U \to \mathbb{R}^3 \quad \text{(die Rotation von } \underline{v}\text{)}$$

durch

$$\operatorname{rot} \underline{v} := \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right).$$

Wir schreiben auch

$$\operatorname{rot} \underline{v} = \nabla \times \underline{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Falls $f: U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar ist, so gilt

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = \nabla \times \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}, \dots \right) \underset{\text{Satz 6.6}}{=} 0.$$

(ii) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$, $f: U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar.

Setze $\Delta f := \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$;

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ heißt Laplaceoperator.

Sei $h: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine zeitabhängige Temperaturverteilung, d.h. $h(x_1, \dots, x_n, t)$ ist Temperatur in $(x_1, \dots, x_n)$ zur Zeit t.

Dann erfüllt h die Wärmeleitungsgleichung

$$\Delta h - \lambda \cdot \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad \text{mit } \frac{1}{\lambda} = \text{Wärmeleitfähigkeit}.$$