5. Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^n$

"Mathematik ist die Kunst, verschiedenen Dingen den gleichen Namen zu geben."
Henri Poincaré

5.1 Def.: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein echtes Intervall (d.h. I enthält mehr als einen Punkt).

Eine stetige Abbildung

$$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : I \to \mathbb{R}^n$$

heißt Kurve im $\mathbb{R}^n$.

5.2 Bem.: Wegen Prop. 3.2 [Charakterisierung von Stetigkeit mit Folgen] und Prop. 2.19 [koordinatenweise Charakterisierung von Konvergenz in $\mathbb{R}^n$] gilt:

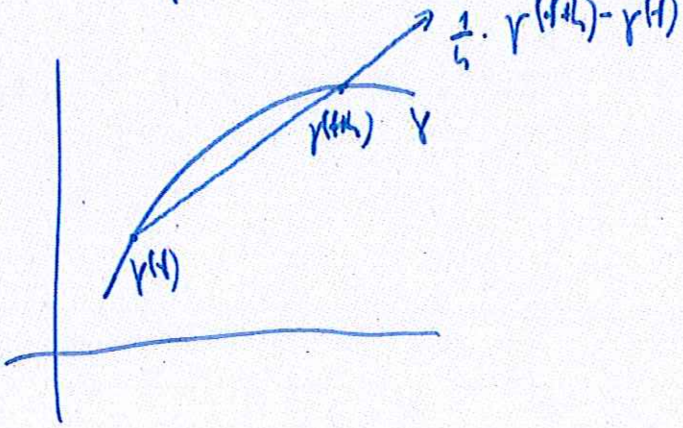
$$\gamma : I \to \mathbb{R}^n \text{ ist stetig} \Leftrightarrow \gamma_i : I \to \mathbb{R} \text{ ist stetig für } i = 1, \dots, n.$$

5.3 Def.: Eine Kurve $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ heißt (stetig) differenzierbar, falls ihre Koordinatenfunktionen $\gamma_i : I \to \mathbb{R}$ (stetig) differenzierbar sind. In diesem Fall heißt $\gamma'(t) := (\gamma_1'(t), \dots, \gamma_n'(t)) \in \mathbb{R}^n$ Tangentialvektor von γ in t und $\|\gamma'(t)\|_2$ die Geschwindigkeit. Für $\gamma'(t) \neq 0$ ist $\frac{1}{\|\gamma'(t)\|_2} \cdot \gamma'(t)$ der Tangenteneinheitsvektor.
γ heißt regulär, falls γ stetig differenzierbar ist und $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$.

5.4 Bemerkung: Falls γ differenzierbar ist, so gilt:

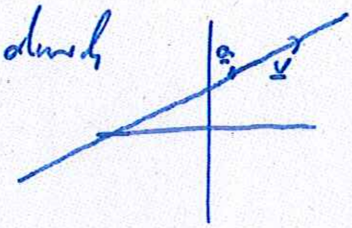
$$\gamma'(t) = \left(\lim_{h \to 0} \frac{\gamma_1(t+h)-\gamma_1(t)}{h}, \dots, \lim_{h \to 0} \frac{\gamma_n(t+h)-\gamma_n(t)}{h} \right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \big(\gamma(t+h) - \gamma(t) \big) \qquad \text{(warum?)}$$



5.5 z.B. (i) $\underline{a}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch

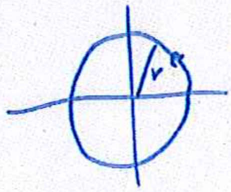
$\gamma(t) = \underline{a} + t \cdot \underline{v}$; $\gamma'(t) = \underline{v}$.



(ii) $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$\gamma(t) = (r \cdot \cos t, r \cdot \sin t)$

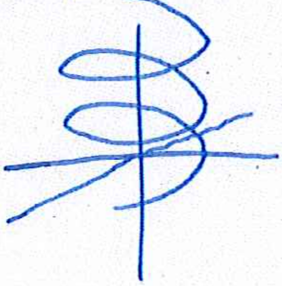
Kreis mit Radius r



(iii) $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$\gamma(t) = (r \cdot \cos t, r \cdot \sin t, c \cdot t)$ (für $c \in \mathbb{R}$)

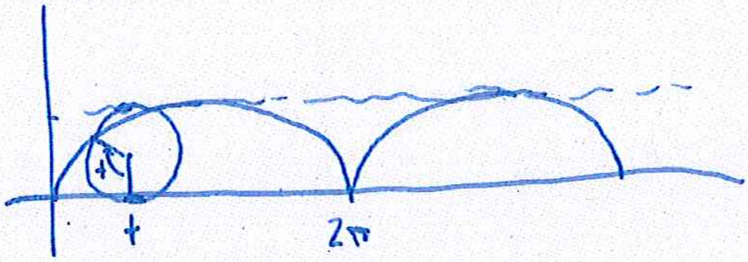
Schraubenlinie



(iv) $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$\gamma(t) = (t - \sin t,\ 1 - \cos t)$

Zykloide

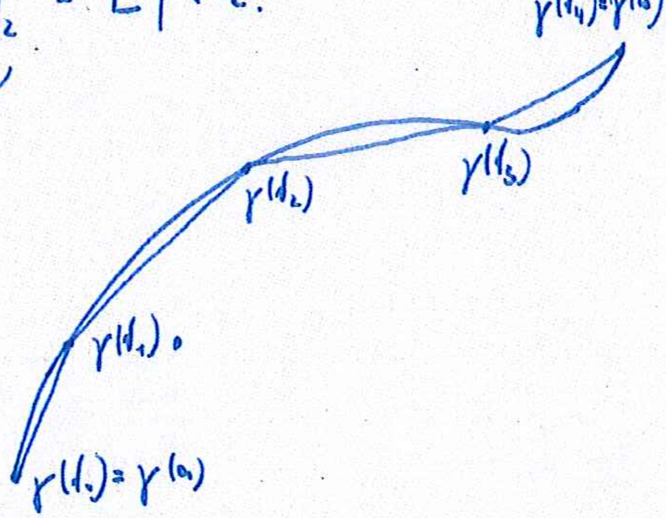


5.6 <u>Def.</u>: Eine Kurve $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ heißt rektifizierbar mit Länge L, falls gilt:

Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$ mit folgender Eigenschaft:

Für jede Unterteilung $a = t_0 < \dots < t_k = b$ mit $|t_i - t_{i-1}| < \delta$

ist $\left| \underbrace{\sum_{j=1}^{k} \| \gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) \|_2}_{\text{Länge des Polygonzugs}} - L \right| < \varepsilon.$



5.7 <u>Bem.</u>: $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig $\not\Rightarrow$ γ rektifizierbar (Übung)

5.8 Lemma: Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Zu $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$ so dass für $\bar{t} \neq t \in [a,b]$ mit $|\bar{t} - t| < \delta$ gilt $\left\| \frac{1}{\bar{t}-t} \cdot (\gamma(\bar{t}) - \gamma(t)) - \gamma'(\bar{t}) \right\|_2 < \varepsilon$.

Bew.: Für $i \in \{1, \dots, n\}$ ist $\gamma_i' : [a,b]$ stetig, nach Satz 4.13 also gleichmäßig stetig. Zu $\varepsilon > 0$ existiert daher $\delta_i > 0$, so dass für $s, \bar{t} \in [a,b]$ mit $|\bar{t} - s| < \delta_i$ gilt

$$|\gamma_i'(s) - \gamma_i'(\bar{t})| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

Setze $\delta := \min\{\delta_i \mid i = 1, \dots, n\}$.

Falls nun $\bar{t} \neq t \in [a,b]$ mit $|\bar{t} - t| < \delta$, so existiert nach MWS ein s_i zwischen $\bar{t}$ und t mit $\frac{\gamma_i(\bar{t}) - \gamma_i(t)}{\bar{t} - t} = \gamma_i'(s_i)$, also

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{1}{\bar{t}-t} \cdot (\gamma(\bar{t}) - \gamma(t)) - \gamma'(\bar{t}) \right\|_2 \\
&\leq \sqrt{n} \cdot \max_{i \in \{1,\dots,n\}} \left| \frac{\gamma_i(\bar{t}) - \gamma_i(t)}{\bar{t} - t} - \gamma_i'(\bar{t}) \right| \\
&\leq \sqrt{n} \cdot \max_{i \in \{1,\dots,n\}} |\gamma_i'(s_i) - \gamma_i'(\bar{t})| \\
&< \sqrt{n} \cdot \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

$\square$

5.9 **Satz:** Sei $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar.
Dann ist γ rektifizierbar mit Länge

$$L = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 \, dt.$$

Bew.: Die Funktion $h:[a,b]\to\mathbb{R}$, $h(t) := \|\gamma'(t)\|_2$ ist stetig auf $[a,b]$, also Regelfunktion.

Nach Ana I, 13.10 gilt

$$\int_a^b h(t)\,dt = \lim_{k\to\infty} \int_a^b g_k(t)\,dt,$$

falls $(g_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}([a,b])$ eine Folge von Treppenfunktionen ist mit $\|h-g_k\|_{\infty,[a,b]} \xrightarrow{k\to\infty} 0$.

Sei nun $\varepsilon>0$. Dann existiert $\beta>0$ so dass gilt:
Falls $g\in\mathcal{T}([a,b])$ mit $\|h-g\|_{\infty,[a,b]}<\beta$, so gilt

$$\left|\int_a^b h(t)\,dt - \int_a^b g(t)\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{(warum?)}.$$

Nach Satz 4.13 ist h gleichmäßig stetig, also existiert $\alpha>0$ so dass gilt: $|t-t'|<\alpha \Rightarrow |h(t)-h(t')|<\frac{\beta}{2}$.

Nach Lemma 5.8 existiert $0<\delta\leq\alpha$ so dass für $\tilde t \neq t \in [a,b]$ mit $|\tilde t - t|<\delta$ gilt $\left\|\frac{1}{\tilde t - t}\cdot(\gamma(\tilde t)-\gamma(t)) - \gamma'(\tilde t)\right\|_2 < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

Falls nun $a = t_0 < \dots < t_k = b$ und $|t_i - t_{i-1}| < \delta \ (\leq \alpha)$,

so gilt für $g(t) := \begin{cases} h(t_i), & \text{falls } t \in (t_{i-1}, t_i] \\ h(t_0), & \text{falls } t = t_0 \end{cases}$;

weiter gilt $g \in T([a,b])$,

$$\|h - g\|_{\infty,[a,b]} \leq \max_{i=1,\dots,k} \sup\{|h(t) - h(t_i)| \mid t \in (t_{i-1}, t_i]\} \leq \frac{\beta}{2} < \beta,$$

also

$$\left| \int_a^b h(t)\,dt - \int_a^b g(t)\,dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wir haben für $j = 1, \dots, k$

$$\|(\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})) - (t_j - t_{j-1})\gamma'(t_j)\|_2 < \frac{(t_j - t_{j-1}) \cdot \varepsilon}{2(b-a)},$$

also

$$\left| \int_a^b h(t)\,dt - \sum_{j=1}^k \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|_2 \right|$$

$$\leq \left| \int_a^b h(t)\,dt - \sum_{j=1}^k (t_j - t_{j-1})\|\gamma'(t_j)\|_2 \right| + \sum_{j=1}^k \frac{(t_j - t_{j-1}) \cdot \varepsilon}{2(b-a)}$$

$$= \left| \int_a^b h(t)\,dt - \int_a^b g(t)\,dt \right| + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$< \varepsilon. \qquad \square$$

5.10 Prop. u. Def.: Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve und $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ bijektiv und stetig.
Dann heißt φ Parametertransformation und $\delta := \gamma \circ \varphi : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ ist eine Kurve.
Falls φ und φ^{-1} stetig differenzierbar sind, so gilt

a) $\varphi'(t) \neq 0$ für $t \in [c,d]$, $(\varphi^{-1})'(t) \neq 0$ für $t \in [a,b]$

b) $\delta'(t) = \underbrace{\varphi'(t)}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{\gamma'(\varphi(t))}_{\in \mathbb{R}^n}$ für $t \in [c,d]$

(insbesondere ist δ stetig differenzierbar)

c) $\int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 \, dt = \int_c^d \|\delta'(t)\|_2 \, dt$.

Bew.: $\gamma \circ \varphi$ ist stetig nach Prop. 3.4, also eine Kurve.

a) $\varphi^{-1} \circ \varphi = id_{[c,d]}$ und $1 = (\varphi^{-1} \circ \varphi)'(t) = (\varphi^{-1})'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$,
also $\varphi'(t) \neq 0$ für $t \in [a,b]$.

b) $\delta'(t) = (\gamma \circ \varphi)'(t) = ((\gamma_1 \circ \varphi)'(t), \ldots, (\gamma_n \circ \varphi)'(t))$
$= (\varphi'(t) \cdot \gamma_1'(\varphi(t)), \ldots, \varphi'(t) \cdot \gamma_n'(\varphi(t)))$
$= \varphi'(t) \cdot \gamma'(\varphi(t))$, $t \in [c,d]$.

c) $\varphi'(t) \neq 0$ für $t \in [a,b]$; φ' ist stetig, also gilt

(1) $\varphi'(t) > 0$ für alle $t \in [a,b]$ oder (2) $\varphi'(t) < 0$ für alle $t \in [a,b]$.

Wir betrachten (1); (2) geht analog.

φ ist s.m.w. und $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$.

Es gilt

$$\int_c^d \|\tilde{\gamma}'(t)\|_2 \, dt = \int_c^d \|\varphi'(t) \cdot \gamma(\varphi(t))\|_2 \, dt$$

$$= \int_c^d \varphi'(t) \|\gamma'(\varphi(t))\|_2 \, dt$$

$$\underset{\text{(Ana I, 13.17)}}{\overset{\text{Substitutionsregel}}{=}} \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} \|\gamma'(x)\|_2 \, dx$$

$$= \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 \, dt .$$

□

5.11 z.B.: $\gamma(t) = (t - \sin t, \ 1 - \cos t)$ (Zykloide)

$\gamma'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$

$\|\gamma'(t)\|_2 = \left((1-\cos t)^2 + (\sin t)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \left(2(1-\cos t)\right)^{\frac{1}{2}} = \left(4 \sin^2 \frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = 2 \left|\sin \frac{t}{2}\right|$

[Ana I, 11.6: $\cos y - \cos x = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$]

$L = \int_0^{2\pi} 2 \left|\sin \frac{t}{2}\right| dt = 2 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} \, dt \overset{u = \frac{t}{2}}{=} 4 \int_0^{\pi} \sin u \, du = -4 \cos u \Big|_0^{\pi} = 8.$