4. Kompaktheit

"Pauca, sed matura." ["Weniges, aber Reifes."]: Wahlspruch von Carl Friedrich Gauß

4.1 Def.: Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $Y \subset X$.
Eine offene Überdeckung von Y ist eine Familie
$(U_i)_{i\in I} \subset \mathcal{T}$ mit $Y \subset \bigcup_{i\in I} U_i$.
Falls $J \subset I$ mit $Y \subset \bigcup_{i\in J} U_i$, so heißt $(U_i)_{i\in J}$ Teilüberdeckung.
$(U_i)_{i\in J}$ heißt endlich, falls J endlich ist.

4.2 Def.: Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.
$K \subset X$ heißt kompakt, falls gilt:
Zu jeder offenen Überdeckung von K existiert
eine endliche Teilüberdeckung.
(D.h.: Für jede offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von K existieren
$i_0, \dots, i_k \in I$ mit $K \subset \bigcup_{l=0}^{k} U_{i_l}$.)

4.3 z.B.: (i) Sei (X, d) ein metrischer Raum, $(x_n)_{\mathbb{N}} \subset X$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$.
Dann ist $K := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \bar{x}$ kompakt:
Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von K, dann existiert
$\tau \in I$ mit $\bar{x} \in U_\tau$. U_τ offen und $x_n \to \bar{x} \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ mit
$x_n \in U_\tau$ falls $n \geq N$. Wähle $i_0, \dots, i_{N-1} \in I$ mit $x_n \in U_{i_n}$,
$n \in \{0, \dots, N-1\}$, dann gilt $K \subset U_{i_0} \cup \dots \cup U_{i_{N-1}} \cup U_\tau$.

(ii) $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist i.a. nicht kompakt:

Wie in (i)

Sei $x_n := \frac{1}{n+1} \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0 = \bar{x}$.

$U_n := \left(\frac{1}{n+2}, 1\right] \underset{\text{offen}}{\subset} [0,1]$, dann ist

$\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$, aber es gibt keine

offene Teilüberdeckung (warum?).

4.4 <u>Prop.:</u> Sei (X,d) ein metrischer Raum, $K \subset X$ kompakt.

Dann ist K beschränkt und abgeschlossen.

Bew.: a) Sei $\bar{x} \in X$ beliebig, dann ist $(B(\bar{x}, n))_{n\in\mathbb{N}}$

offene Überdeckung von K (warum?).

K kompakt $\Rightarrow \exists\, n_0, \dots, n_k \in \mathbb{N}: K \subset \bigcup_{i=0}^{k} B(\bar{x}, n_i)$.

Sei $N := \max\{n_0, \dots, n_k\}$, dann gilt $K \subset \bigcup_{i=0}^{k} B(\bar{x}, n_i) \subset B(\bar{x}, N)$,

also ist K beschränkt.

b) Sei nun $x \in X \setminus K$.

Setze $U_n := \{y \in X \mid d(x,y) > \frac{1}{n+1}\} = X \setminus \underbrace{\bar{B}(x, \tfrac{1}{n+1})}_{\text{abg. in } X} \underset{\text{offen}}{\subset} X$,

dann gilt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = X \setminus \{x\} \supset K$.

K kompakt $\Rightarrow \exists\, n_0, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ mit $K \subset \bigcup_{i=0}^{k} U_{n_i}$.

Sei $N := \max\{n_0, \dots, n_k\}$, dann gilt $K \subset X \setminus \bar{B}(x, \frac{1}{N+1})$

und $x \in B(x, \frac{1}{N+1}) \subset X \setminus K$, d.h. $X \setminus K$ ist Umgebung von x.

Daher ist $X \setminus K \underset{\text{offen}}{\subset} X$. □

4.5 Prop.: Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $K \subset X$ kompakt, $A \subset X$ abgeschlossen, $A \subset K$. Dann ist auch A kpt.

Bew.: Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von A.
Dann gilt $K \subset \bigcup_{i \in I} U_i \cup \underbrace{X \setminus A}_{\text{offen}}$, also existieren
$i_0, \dots, i_n \in I$ mit $K \subset \bigcup_{k=0}^{n} U_{i_k} \cup X \setminus A$.

$\overset{A \subset K}{\Rightarrow} A \subset \bigcup_{k=0}^{n} U_{i_k}$ und $(U_{i_0}, \dots, U_{i_n})$ ist endliche Teilüberdeckung von A. $\square$

4.6 Bem.: Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $K \subset X$. Dann gilt:

K kompakt bzgl. $\mathcal{T} \Leftrightarrow K$ kompakt bzgl. $\mathcal{T}_K$ (warum?)

Wir schreiben daher $K \underset{\text{kompakt}}{\subset} X$.

"Kompaktheit ist eine intrinsische Eigenschaft"

4.7 Satz (Heine-Borel): $A \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt $\Leftrightarrow$ A ist beschränkt und abg.

Bew.: "$\Rightarrow$": Prop. 4.4.

"$\Leftarrow$": A beschränkt $\Rightarrow A \subset K := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid -L \leq x_i \leq L,\ i = 1, \dots, n\}$ für ein $L \in \mathbb{R}_+$.

Es genügt nun zu zeigen, dass K kpt. ist, denn dann ist A kpt. nach Prop. 4.5.

Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von K.

Annahme: $(U_i)_{i\in I}$ besitzt keine endliche Teilüberdeckung von K.

Wir konstruieren induktiv

$\mathbb{R}^n \supset K_0 \supset K_1 \supset \dots$ und $I_{m,i} \subset \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, $i \in \{1,\dots,n\}$

mit folgenden Eigenschaften:

(i) $I_{m,i}$ ist abg. Intervall der Länge $2^{-m+1} \cdot L$, $m \in \mathbb{N}$, $i \in \{1,\dots,n\}$

(ii) $K_m = I_{m,1} \times \dots \times I_{m,n}$, $m \in \mathbb{N}$

(iii) $(U_i)_{i\in I}$ besitzt keine endliche Teilüberdeckung von K_m, $m \in \mathbb{N}$.

Setze $K_0 := K$, $I_{0,i} := [-L, L]$, dann sind (i), (ii), (iii) erfüllt.

Seien nun $K_m, I_{m,i}$ bereits konstruiert.

Schreibe $I_{m,i} := \bigcup_{j\in\{0,1\}} I^{(j)}_{m,i}$, wo $I^{(j)}_{m,i} \subset \mathbb{R}$ abg. Intervalle

mit Länge $\frac{1}{2} \cdot |I_{m,i}|$ sind. Dann gilt

$$K_m = \bigcup_{(j_1,\dots,j_n)\in\{0,1\}^n} I^{(j_1)}_{m,1} \times \dots \times I^{(j_n)}_{m,n} \quad \text{(endliche Vereinigung)}.$$

Dann existiert ein $(\bar{j}_1,\dots,\bar{j}_n) \in \{0,1\}^n$ so dass $(U_i)_{i\in I}$

keine endliche Teilüberdeckung für $I^{(\bar{j}_1)}_{m,1} \times \dots \times I^{(\bar{j}_n)}_{m,n}$ besitzt.

Setze $K_{m+1} := I^{(\bar{j}_1)}_{m,1} \times \dots \times I^{(\bar{j}_n)}_{m,n}$ und $I_{m+1,i} := I^{(\bar{j}_i)}_{m,i}$, dann

sind (i), (ii), (iii) erfüllt und die Induktion ist vollständig.

Wir haben nun $K_0 \supset K_1 \supset \dots$ nichtleer, abgeschlossen, mit $\operatorname{diam} K_m \to 0$

$\overset{2.18}{\Longrightarrow}$ ($\mathbb{R}^n$ vollständig) es existiert genau ein Punkt $\bar{x} \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} K_m \subset K$. (warum?)

$(U_i)_{i\in I}$ überdeckt K, also existiert $\bar{\imath} \in I$ mit $\bar{x} \in U_{\bar{\imath}}$.

$U_{\bar{\imath}}$ offen, $\operatorname{diam} K_m \to 0 \Rightarrow \exists M \in \mathbb{N}: \forall m \geq M: K_m \subset U_{\bar{\imath}}$ (warum?).

$\lightning$ zu (iii). $\square$

4.8 Satz (Bolzano-Weierstraß): Sei (X, d) ein metrischer Raum, $K \subset X$ kompakt. Dann besitzt jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ eine konvergente Teilfolge.

Bew.: Annahme: Für alle $x \in K$ gilt: x ist nicht Limes einer Teilfolge.

$\Rightarrow \forall y \in K \; \exists \varepsilon_y > 0 : \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cap B(y, \varepsilon_y)$ ist endlich (warum?)

$\Rightarrow (B(y, \varepsilon_y))_{y \in K}$ ist offene Überdeckung von K

$\overset{K \text{ kompakt}}{\Rightarrow} \exists y_0, \ldots, y_m \in K : K \subset \bigcup_{i=0}^{m} B(y_i, \varepsilon_{y_i})$

$(x_n)_{\mathbb{N}} \subset K \Rightarrow \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \underbrace{\bigcup_{i=0}^{m} \underbrace{\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cap B(y_i, \varepsilon_{y_i})}_{\text{endlich}}}_{\text{endlich}}$

$\Rightarrow$ mindestens ein x_n tritt unendlich oft auf

$\Rightarrow \exists$ konstante Teilfolge $\lightning$ □

4.9 Satz: Seien $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume, $f: X \to Y$ stetig, $K \subset X$ kompakt. Dann ist $f(K) \subset Y$ kompakt.

Bew.: Sei $(V_i)_{i \in I} \subset \mathcal{T}_Y$ eine offene Überdeckung von $f(K)$, dann ist $(f^{-1}(V_i))_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von K (f ist stetig). K kompakt $\Rightarrow \exists i_0, \ldots, i_m \in I$ mit $K \subset \bigcup_{k=0}^{m} f^{-1}(V_{i_k})$

$\Rightarrow f(K) \subset f\left(\bigcup_{k=0}^{m} f^{-1}(V_{i_k})\right) = \bigcup_{k=0}^{m} f f^{-1}(V_{i_k}) \subset \bigcup_{k=0}^{m} V_{i_k}$

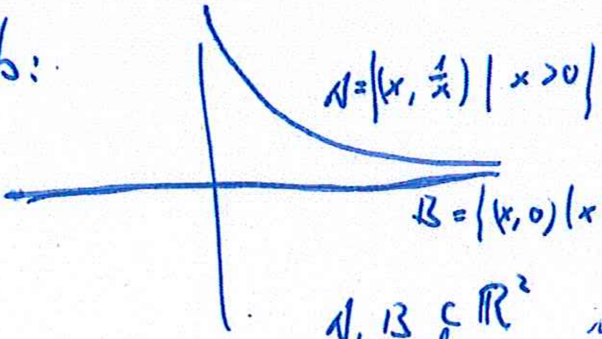
$\Rightarrow (V_{i_0}, \ldots, V_{i_m})$ ist endliche Teilüberdeckung von $f(K)$. □

4.10 <u>Cor.</u>: Sei $(X, \mathcal{T}) \neq \emptyset$ ein kompakter top. Raum, $f: X \to \mathbb{R}$ stetig.
Dann nimmt f ihr Maximum und Minimum an.

Bew.: Nach 4.9 ist $f(X) \subset \mathbb{R}$ kompakt.
Nach 4.4 ist $f(X)$ beschränkt und abgeschlossen.
Es gibt $(y_n)_{\mathbb{N}} \subset f(X)$ mit $y_n \xrightarrow{n\to\infty} \sup f(X) < \infty$.
($f(X)$ beschränkt)
Nach 2.17 gilt $\sup f(X) \in f(X)$, denn $f(X) \underset{\text{abg.}}{\subset} \mathbb{R}$. $\square$

4.11 <u>z.B.</u>: (X,d) metr. Raum, $A \underset{\text{abg.}}{\subset} X$, $K \underset{\text{kpt.}}{\subset} X$, $A \cap K = \emptyset$.
Nach Blatt 5 ist $x \mapsto \operatorname{dist}(x, A) := \inf\{d(x,y) \mid y \in A\}$
stetig auf K. Nach 4.10 nimmt die Funktion ihr
Minimum an, d.h. es ex. $\bar{x} \in K$ mit
$\operatorname{dist}(\bar{x}, A) = \inf\{\operatorname{dist}(x,A) \mid x \in K\}$.
A abg., $\bar{x} \in X \setminus A \Rightarrow \operatorname{dist}(\bar{x}, A) > 0$ (warum? z.B. 2.17)
$\Rightarrow \operatorname{dist}(K, A) := \inf\{d(x,y) \mid x \in K, y \in A\} > 0$.

Andererseits:



$A, B \underset{\text{abg}}{\subset} \mathbb{R}^2$ mit $A \cap B = \emptyset$,
aber $\operatorname{dist}(A,B) = 0$.

4.12 Def.: Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume, $f: X \to Y$ stetig.
f heißt gleichmäßig stetig, falls gilt:
$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \left(d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon \right).$$

4.13 Satz: Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume, X kompakt, $f: X \to Y$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig.

Bew.: Angenommen, f sei nicht gleichmäßig stetig, d.h.:
$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \; \exists \, x, x' \in X : d_X(x, x') < \delta, \; d_Y(f(x), f(x')) \geq \varepsilon. \quad (*)$$
Insbesondere für $\delta := \frac{1}{n+1}$ existieren $x_n, x_n' \in X$: $d_X(x_n, x_n') < \frac{1}{n+1}$,
$d_Y(f(x_n), f(x_n')) \geq \varepsilon$.

X kompakt $\overset{\text{Satz 4.8}}{\Rightarrow}$ $(x_n)_{\mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$;
sei $\bar{x} := \lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k}$.

Wegen $d_X(x_{n_k}, x_{n_k}') \xrightarrow{k \to \infty} 0$ gilt dann auch $\bar{x} = \lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k}'$.

Weiter gilt
$$\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) \overset{f \text{ stetig}}{=} f\left(\lim_{k \to \infty} x_{n_k}\right) = f\left(\lim_{k \to \infty} x_{n_k}'\right) \overset{f \text{ stetig}}{=} \lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}'),$$
also auch $d_Y(f(x_{n_k}), f(x_{n_k}')) \xrightarrow{k \to \infty} 0$, ↯ zu $(*)$. $\square$