3. Stetigkeit

"The fun is in the struggle with a problem that resists." Sylvia Serfaty

3.1 <u>Def.</u>: Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume, $f: X \to Y$ eine Abb.

f heißt stetig in $\bar{x} \in X$, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in B_{d_X}(\bar{x}, \delta) : f(x) \in B_{d_Y}(f(\bar{x}), \varepsilon).$$

(d.h. $d_X(x, \bar{x}) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(\bar{x})) < \varepsilon$)

f heißt stetig, falls f in jedem Punkt von X stetig ist.

3.2 <u>Prop.</u>: Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume, $f: X \to Y$ eine Abb.

Dann sind äquivalent:

(i) f ist stetig in $\bar{x} \in X$.

(ii) Für jede Umgebung V von $f(\bar{x})$ existiert eine Umgebung U von $\bar{x}$ mit $f(U) \subset V$.

(iii) Für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\bar{x})$ (d.h. $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = f(\bar{x})$).

Außerdem sind äquivalent:

(a) f ist stetig.

(b) $\forall V \in \mathcal{T}_{d_Y} : f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_{d_X}$.

(c) $\forall A \underset{\text{abg.}}{\subset} Y : f^{-1}(A) \underset{\text{abg.}}{\subset} X$.

3. Stetigkeit

3.1 <u>Def.:</u> Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume, $f: X \to Y$ eine Abb.

f heißt stetig in $\bar{x} \in X$, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in B_{d_X}(\bar{x}, \delta) : f(x) \in B_{d_Y}(f(\bar{x}), \varepsilon).$$

(d.h. $d_X(x, \bar{x}) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(\bar{x})) < \varepsilon$)

f heißt stetig, falls f in jedem Punkt von X stetig ist.

3.2 <u>Prop.:</u> Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume, $f: X \to Y$ eine Abb.

Dann sind äquivalent:

(i) f ist stetig in $\bar{x} \in X$.

(ii) Für jede Umgebung V von $f(\bar{x})$ existiert eine Umgebung U von $\bar{x}$ mit $f(U) \subset V$.

(iii) Für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\bar{x})$ (d.h. $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = f(\bar{x})$).

Außerdem sind äquivalent:

(a) f ist stetig.

(b) $\forall V \in \mathcal{T}_{d_Y} : f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_{d_X}$.

(c) $\forall A \underset{\text{abg.}}{\subset} Y : f^{-1}(A) \underset{\text{abg.}}{\subset} X$.

Bew.: (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei V Umgebung von $f(\bar{x})$

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 : B_{d_Y}(f(\bar{x}), \varepsilon) \subset V$

$\overset{(i)}{\Rightarrow} \exists\, \delta > 0 : \forall x \in B_{d_X}(\bar{x}, \delta) : f(x) \in B_{d_Y}(f(\bar{x}), \varepsilon)$.

Setzen $U := B_{d_X}(\bar{x}, \delta)$, dann ist U Umgebung von $\bar{x}$

und es gilt $f(U) \subset B_{d_Y}(f(\bar{x}), \varepsilon) \subset V$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sei $(x_n)_{\mathbb{N}} \subset X$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$.

z.z.: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\bar{x})$.

Sei $\varepsilon > 0$. Setzen $V := B_{d_Y}(f(\bar{x}), \varepsilon)$, nach (ii)

existiert eine Umgebung U von $\bar{x}$ mit $f(U) \subset V$.

Aber dann ex. $\delta > 0$ mit $B_{d_X}(\bar{x}, \delta) \subset U$,

also auch $f(B_X(\bar{x}, \delta)) \subset f(U) \subset V$.

Wegen $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ ex. $N \in \mathbb{N}$ sodass $x_n \in B_{d_X}(\bar{x}, \delta)$ falls $n \geq N$.

$\Rightarrow f(x_n) \in V = B_{d_Y}(f(\bar{x}), \varepsilon)$ falls $n \geq N$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Angenommen, (i) gelte nicht, d.h.

$\exists\, \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists\, x \in B_{d_X}(\bar{x}, \delta) : f(x) \notin B_{d_Y}(f(\bar{x}), \varepsilon)$.

Insbesondere für $\delta = \frac{1}{n+1}$ ex. $x_n \in B_{d_X}(\bar{x}, \delta) : d(f(\bar{x}), f(x_n)) \geq \varepsilon$.

Dann gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$, aber $(f(x_n))_{\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gegen $f(\bar{x})$ ↯.

(a) $\Rightarrow$ (b): Sei $V \underset{\text{offen}}{\subset} Y$.

Falls $x \in f^{-1}(V)$, so ist V Umgebung von $f(x)$

$\overset{(ii)}{\underset{(f \text{ stetig in } x)}{\Longrightarrow}}$ es existiert eine Umgebung U von x mit $f(U) \subset V$.

Dann gilt $x \in U \subset f^{-1}(V)$, also ist $f^{-1}(V)$ Umgebung von x. Aber $x \in f^{-1}(V)$ war beliebig, also ist $f^{-1}(V) \underset{\text{offen}}{\subset} X$.

(b) $\Rightarrow$ (a): Sei $x \in X$ und $V \subset Y$ eine Umgebung von $f(x)$.

Dann ex. $W \underset{\text{offen}}{\subset} Y$ mit $f(x) \in W \subset V$

$\overset{(b)}{\Longrightarrow}$ $x \in f^{-1}(W) \underset{\text{offen}}{\subset} X$ $\Rightarrow$ $U := f^{-1}(W)$ ist Umgebung von x mit $f(U) \subset W \subset V$

$\overset{3.2(ii)}{\Longrightarrow}$ f ist stetig in x.

(b) $\Leftrightarrow$ (c): klar mit $f^{-1}(Y \setminus V) = X \setminus f^{-1}(V)$. $\square$

3.3 Def.: Seien $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume, $f: X \to Y$ eine Abb.

f heißt stetig in $\bar{x} \in X$, falls 3.2(ii) gilt.

f heißt stetig, falls 3.2(b) gilt.

(Äquivalent: f ist stetig in jedem Punkt $x \in X$ (warum?))

3.4 Propos. Seien $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y), (Z, \mathcal{T}_Z)$ topologische Räume,
$f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ stetig.
Dann ist $g \circ f$ stetig.

Bew.:
$$U \underset{\text{offen}}{\subset} Z \overset{g \text{ stetig}}{\Longrightarrow} g^{-1}(U) \underset{\text{offen}}{\subset} Y \overset{f \text{ stetig}}{\Longrightarrow} f^{-1}(g^{-1}(U)) \underset{\text{offen}}{\subset} X$$
$$f^{-1}(g^{-1}(U)) = \{x \in X \mid f(x) \in g^{-1}(U)\} = \{x \in X \mid g(f(x)) \in U\} = (g \circ f)^{-1}(U)$$
□

3.5 Def.: Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume,
$f_n: X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$ und $f: X \to Y$ Abbildungen.

(i) $f_n \xrightarrow{n \to \infty} f$ punktw., falls gilt: $\forall x \in X: f_n(x) \xrightarrow{n \to \infty} f(x)$

(ii) $f_n \xrightarrow{n \to \infty} f$ glm., falls gilt:
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}: \forall x \in X, n \geq N: d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$

3.6 Satz: Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume,
$f_n: X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$ und $f: X \to Y$ Abbildungen.
Falls die f_n stetig sind und $f_n \xrightarrow{n \to \infty} f$ glm.,
so ist auch f stetig.

Bew.: Wie Ana I ~~II~~ 14.4 (Übung). □

3.7 z.B.: (i) V, W normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume, $f: V \to W$ linear.

Dann sind äquivalent:

(a) f ist stetig

(b) $\|f\| := \sup\{\|f(v)\| \mid \|v\| \leq 1\} < \infty$

(c) $\exists\, C \in \mathbb{R}_+ : \|f(v)\| \leq C \cdot \|v\|$ für alle $v \in V$.

Bew.: (a) $\Rightarrow$ (b): f ist stetig in 0, daher gilt:

Zu $\varepsilon := 1$ ex. $\delta > 0$ mit: $\|v - 0\| < \delta \Rightarrow \|f(v) - \underbrace{f(0)}_{=0}\| < 1$.

Falls $\|v\| \leq 1$, so gilt $\|\frac{\delta}{2} \cdot v\| < \delta$, also

$\frac{\delta}{2}\|f(v)\| = \|f(\frac{\delta}{2} \cdot v)\| < 1$ und $\|f(v)\| < \frac{2}{\delta}$.

$\Rightarrow \|f\| \leq \frac{2}{\delta} < \infty$.

(b) $\Rightarrow$ (c): Setze $C := \|f\|$, dann gilt (für $v \neq 0$)

$\|f(v)\| = \|v\| \cdot \|\frac{1}{\|v\|} \cdot f(v)\| = \|v\| \cdot \|f(\frac{1}{\|v\|} \cdot v)\|$

$\leq \|v\| \cdot \|f\| \leq C \cdot \|v\|$.

(c) $\Rightarrow$ (a): Klar falls $C = 0$. Für $C > 0$:

Gegeben $\varepsilon > 0$, setze $\delta := \frac{\varepsilon}{C}$.

$\|v - v'\| < \delta \Rightarrow \|f(v) - f(v')\| = \|f(v - v')\| \overset{(c)}{\leq} C\|v - v'\|$

$< C \cdot \delta = \varepsilon$. $\square$

(ii) $V := \mathcal{C}([a,b]) := \{ f:[a,b] \to \mathbb{R} \text{ stetig} \}$ mit $\|\,.\,\|_{\infty,[a,b]}$

ist normierter Vektorraum:

Stetige Funktionen auf $[a,b]$ sind beschränkt nach Ana I, 9.12;

$\|\,.\,\|_{\infty,[a,b]}$ ist Norm auf $V \subset \{ f:[a,b] \to \mathbb{R} \text{ beschränkt} \}$ nach 1.2(iii).

(iii) $(V, \|\,.\,\|_{\infty,[a,b]})$ ist vollständig:

(wie in (ii))

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ Cauchyfolge, dann gilt für $x \in [a,b]$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_{\infty,[a,b]}.$$

Daher ist $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ Cauchyfolge (warum?),

also konvergent.

Definiere $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in [a,b],$$

dann gilt $\|f - f_n\|_{\infty,[a,b]} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (warum?)(*),

also $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ glm.

Ana I, Satz 14.4 $\Rightarrow$ f ist stetig, also $f \in V$.

(*) Zu $\varepsilon > 0$ ex. $N \in \mathbb{N}$: $\|f_m - f_n\|_\infty \leq \varepsilon$ falls $m,n \geq N$.
$\Rightarrow \forall x \in [a,b]: |f_m(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$ falls $m,n \geq N$.
$\Rightarrow \forall x \in [a,b]: |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$ falls $n \geq N$.
$\Rightarrow \|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon$ falls $n \geq N$.

(iv) Sei $(V, \|\cdot\|_{\infty,[a,b]})$ wie in (ii).

Definiere $\varphi : V \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi(f) := \int_a^b f(x)\,dx,$$

dann ist φ wohldefiniert und linear (Analysis I).

Es gilt

$$|\varphi(f)| \leq \int_a^b \|f\|_{\infty,[a,b]}\,dx = (b-a)\cdot\|f\|_{\infty,[a,b]},$$

d.h. $\underset{\text{mit } |\cdot|}{\varphi : V \to \mathbb{R}}$ ist stetig.

(v) Sei $D : \underset{\text{1-mal stetig differenzierbar}}{C^1([0,1])} \to C([0,1])$ gegeben durch $f \mapsto Df := f'$.

D ist nicht stetig bzgl. $\|\cdot\|_{\infty,[0,1]}$:

Sei $f_n \in C^1([0,1])$ gegeben durch $f_n(x) := x^n$,

dann ist $\|f_n\|_{\infty,[0,1]} = 1$ für alle n, aber

$\|Df_n\|_{\infty,[0,1]} = \|n\cdot x^{n-1}\|_{\infty,[0,1]} = n$, also gilt für <u>kein</u> $C \in \mathbb{R}$

$$\|Df_n\|_{\infty,[0,1]} \leq C\cdot\|f_n\|_{\infty,[0,1]}.$$

(vi) Sei (X,d) ein metrischer Raum, $\bar{x} \in X$.

Def. $f: X \to \mathbb{R}_+$ durch $f(x) := d(x,\bar{x})$. Dann ist f stetig:

Falls $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$, so gilt

$$|f(x) - f(x_n)| = |d(x,\bar{x}) - d(x_n,\bar{x})| \overset{2.\,\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} d(x,x_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

also $f(x_n) \to f(x)$.