2. Metrische Räume. Topologie.

"Ein Mathematiker ist eine Maschine, welche Kaffee in Theoreme verwandelt."

Paul Erdős

2.1 Def.: Sei X eine Menge.
Eine Metrik d auf X ist eine Abbildung

$$d : X \times X \to \mathbb{R}_+$$

mit

(i) $d(x,y) = 0 \iff x = y$ für $x, y \in X$

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$ für $x, y \in X$

(iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ für $x, y, z \in X$.

(X, d) heißt metrischer Raum.

2.2 z.B.: (i) $(\mathbb{R}, d)$ mit $d(x,y) = |x-y|$.

(ii)

$$d(x,y) := |x - \text{Paris}| + |\text{Paris} - y|$$

"französische Eisenbahnmetrik"

(iii) (X,d) metrischer Raum, $A \subset X$, dann ist $(A, d|_{A \times A})$ wieder ein metrischer Raum (wir schreiben oft (A,d)).

(iv) $(V, \|\cdot\|)$ normierter VR, dann definiert $d(x,y) := \|x-y\|$ eine Metrik auf V. [Übung]

(v) $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_{max})$ mit $\|\underline{x}\|_{max} := \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$ ist normierter Raum. Wir schreiben auch $\|\cdot\|_\infty$ für $\|\cdot\|_{max}$.

(vi) $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_1)$ mit $\|\underline{x}\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$ ist normierter Raum.

(vii) $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$ mit $\|\underline{x}\|_2 := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ ist normierter Raum:

1. $\|\underline{x}\|_2 = 0 \iff |x_1| = \dots = |x_n| = 0 \iff \underline{x} = 0$

2. $\|\lambda \cdot \underline{x}\|_2 = |\lambda| \cdot \|x\|_2$ für $\lambda \in \mathbb{K}$, $\underline{x} \in \mathbb{K}^n$

3. Δ-Ungleichung:

A. $0 \neq \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{K}^n$ mit $\|u\|_2 = \|v\|_2 = 1$

$$\Rightarrow 0 \leq \sum_{i=1}^n (|u_i| - |v_i|)^2 = \sum_{i=1}^n |u_i|^2 - 2|u_i||v_i| + |v_i|^2 = 1 - 2\sum_{i=1}^n |u_i||v_i| + 1$$

$$\Rightarrow \left|\sum_{i=1}^n u_i v_i\right| \leq \sum_{i=1}^n |u_i||v_i| \leq 1.$$

B. $0 \neq \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{K}^n$ beliebig

$\Rightarrow$ für $\underline{u} := \frac{1}{\|\underline{x}\|_2} \cdot \underline{x}$, $\underline{v} := \frac{1}{\|\underline{y}\|_2} \cdot \underline{y}$ gilt $\|\underline{u}\|_2 = \|\underline{v}\|_2 = 1$

$$\overset{A}{\Rightarrow} \left|\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\|\underline{x}\|_2} \cdot \frac{y_i}{\|\underline{y}\|_2}\right| = \left|\sum_{i=1}^n u_i v_i\right| \overset{A}{\leq} 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \leq \|\underline{x}\|_2 \|\underline{y}\|_2}$$

Cauchy-Schwarz Ungleichung (trivial für $\underline{x} = 0$ oder $\underline{y} = 0$)

C. $\|\underline{x} + \underline{y}\|_2^2 = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^2 \leq \sum_{i=1}^n \left(|x_i|^2 + 2|x_i||y_i| + |y_i|^2\right)$

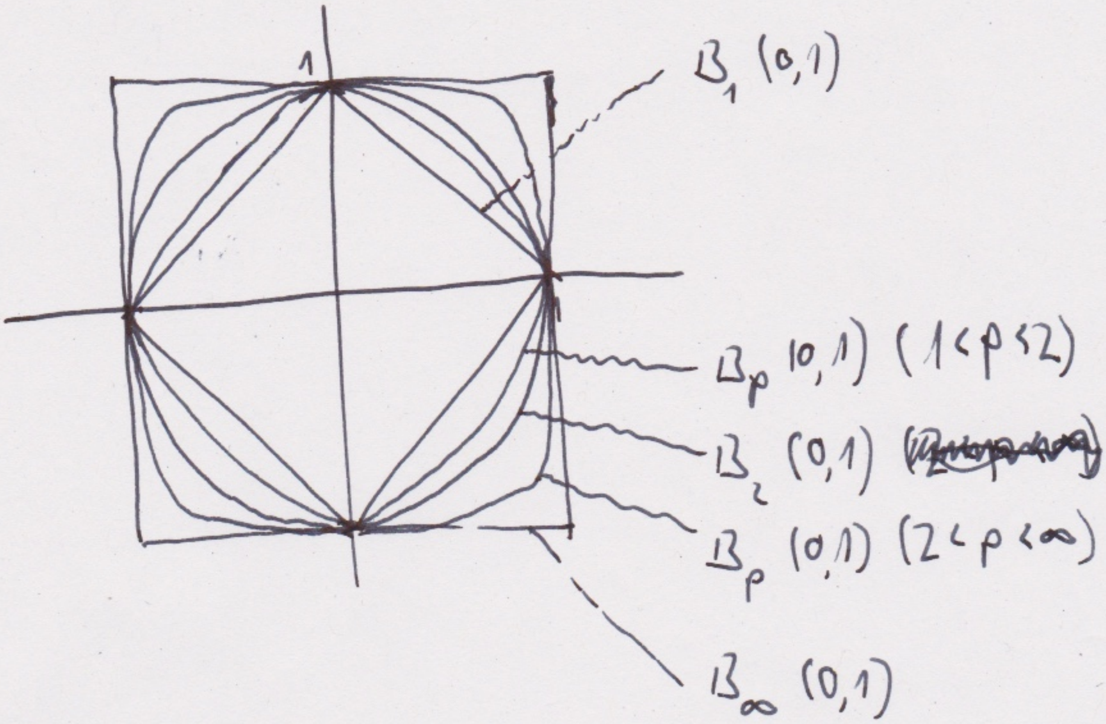
$$\overset{B.}{\leq} \|\underline{x}\|_2^2 + 2\|\underline{x}\|_2\|\underline{y}\|_2 + \|\underline{y}\|_2^2 = \left(\|\underline{x}\|_2 + \|\underline{y}\|_2\right)^2$$

$$\Rightarrow \|\underline{x} + \underline{y}\|_2 \leq \|\underline{x}\|_2 + \|\underline{y}\|_2$$

(viii) $(\mathbb{K}^n, \|.\|_p)$ mit $\|\underline{x}\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ für $1 \le p < \infty$
ist normierter Raum. (Übung)

(ix) $(C([0,1]), \|.\|_p)$ mit $\|f\|_p := \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ für $1 \le p < \infty$
ist normierter Raum. (Übung)

(x) Betrachte $(\mathbb{K}^n, \|.\|_p)$ für $1 \le p \le \infty$;
setze $B_p(0,r) := \{\underline{x} \in \mathbb{K}^n \mid \|x\|_p < r\}$.



(xi) Ist X eine Menge, dann definiert $d(x,y) := \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$
die diskrete Metrik auf X.

2.3 Def.: Sei (X,d) ein metrischer Raum.

(i) $B(x,r) := \{y \in X \mid d(x,y) < r\}$ heißt offene Kugel um x mit Radius r.

(ii) $\overline{B}(x,r) := \{y \in X \mid d(x,y) \leq r\}$ heißt abgeschlossene Kugel um x mit Radius r.

(iii) $U \subset X$ heißt Umgebung von $x \in X$, falls gilt:
$\exists\, \varepsilon > 0 : B(x,\varepsilon) \subset U$.

(iv) $U \subset X$ heißt offen, falls gilt:
$\forall\, x \in U\ \exists\, \varepsilon > 0 : B(x,\varepsilon) \subset U$
(d.h., U ist Umgebung für jedes $x \in U$).

(v) $A \subset X$ heißt abgeschlossen, falls $X \setminus A$ offen ist.

2.4 Bem.: $B(x,r)$ ist offen.

Bew.: Sei $y \in B(x,r)$.

Wähle $\varepsilon := r - d(x,y) > 0$;

dann gilt $B(y,\varepsilon) \subset B(x,r)$, denn

$$z \in B(y,\varepsilon) \Rightarrow d(z,y) < \varepsilon \Rightarrow d(z,x) \leq d(z,y) + d(y,x) < \varepsilon + d(x,y) = r,$$

also $z \in B(x,r)$. $\square$

2.5 Prop.: Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gilt:

(i) $\emptyset, X$ sind offen.

(ii) U, V offen $\Rightarrow$ $U \cap V$ offen.

(iii) Für jede Familie $(U_i)_{i \in I}$ von offenen Mengen ist $\bigcup_{i \in I} U_i$ offen.

Bew.: (i) $(\forall x \in \emptyset \; \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset \emptyset)$ gilt trivialerweise $\Rightarrow \emptyset$ offen.

Wähle $\varepsilon > 0$ beliebig, z. B. $\varepsilon = 1$, dann ist $B(x, \varepsilon) \subset X$ für alle $x \in X$ $\Rightarrow$ X ist offen.

(ii) Sei $x \in U \cap V \Rightarrow \exists \; \varepsilon_U, \varepsilon_V > 0$ mit $B(x, \varepsilon_U) \subset U, B(x, \varepsilon_V) \subset V$.

Setze $\varepsilon := \min\{\varepsilon_U, \varepsilon_V\} > 0$, dann gilt

$B(x, \varepsilon) \subset B(x, \varepsilon_U) \cap B(x, \varepsilon_V) \subset U \cap V$.

(iii) Sei $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$, dann ist $x \in U_T$ für ein $T \in I$.

U_T offen $\Rightarrow \exists \; \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset U_T \subset \bigcup_{i \in I} U_i$.

$\Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i$ ist offen. $\square$

2.6 Def.: Sei X eine Menge. Ein System $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X heißt Topologie auf X, falls gilt:

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

(ii) $U, V \in \mathcal{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$

(iii) $(U_i)_{i \in I} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.

$(X, \mathcal{T})$ heißt topologischer Raum, die Elemente von $\mathcal{T}$ heißen offene Mengen von X. $A \subset X$ heißt abgeschlossen, falls $X \setminus A \in \mathcal{T}$. $Y \subset X$ heißt Umgebung von $x \in X$, falls $U \in \mathcal{T}$ existiert mit $x \in U \subset Y$.

2.7 Bem.: Sei (X, d) ein metrischer Raum. Wir definieren

$$\mathcal{T}_d := \{U \subset X \mid U \text{ ist offen im Sinne von 2.3(iv)}\}.$$

Nach Prop. 2.5 ist $\mathcal{T}_d$ eine Topologie auf X; wir sagen $\mathcal{T}_d$ ist die von d induzierte Topologie.

2.8 Prop.: Jeder metrische Raum ist Hausdorffsch, d.h.:

$$\forall\, x \neq y \in X \ \exists\, U, V \subset X \text{ offen}: x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset.$$

Beweis: Gegeben $x \neq y \in X$, setze $U := B(x, \frac{d(x,y)}{2})$, $V := B(y, \frac{d(x,y)}{2})$, dann sind $U, V \subset X$ offen (nach Bem. 2.4) und es gilt $x \in U$, $y \in V$.
Angenommen $U \cap V \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, z \in U \cap V \Rightarrow d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,x) < \frac{d(x,y)}{2} + \frac{d(x,y)}{2} = d(x,y)$ ↯ □

2.9 Def.: Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $Y \subset X$.

Wir definieren den Rand ∂Y als

$$\partial Y := \{ x \in X \mid \text{für jede Umgebung } U \text{ von } x \text{ gilt } U \cap Y \neq \emptyset \text{ und } U \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset \}.$$

$\mathring{Y} := Y \setminus \partial Y$ heißt das Innere von Y.

$\overline{Y} := Y \cup \partial Y$ heißt Abschluss von Y.

2.10 Prop.: Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $Y \subset X$.

a) $\mathring{Y}$ ist offen

b) $\overline{Y}$ ist abgeschlossen

c) ∂Y ist abgeschlossen.

Bew. a) $y \in \mathring{Y} \Rightarrow \exists\, U_y$ offen mit $y \in U_y$ und $U_y \cap (X \setminus Y) = \emptyset$.

Aber dann gilt $y \in U_y \subset Y$.

Es folgt $\mathring{Y} \subset \underbrace{\bigcup_{y \in \mathring{Y}} U_y}_{\text{offen}} \subset Y$.

Für jedes $y' \in \bigcup_{y \in \mathring{Y}} U_y \subset Y$ gilt $y' \notin \partial Y$, denn $\bigcup_{y \in \mathring{Y}} U_y$ ist Umgebung von y' mit $\bigcup_{y \in \mathring{Y}} U_y \cap (X \setminus Y) = \emptyset$.

$\Rightarrow \mathring{Y} \subset \bigcup_{y \in \mathring{Y}} U_y \subset Y \setminus \partial Y = \mathring{Y}$

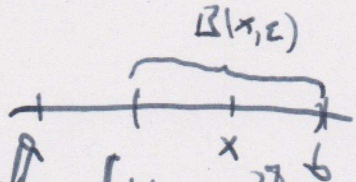
$\Rightarrow \mathring{Y} = \bigcup_{y \in \mathring{Y}} U_y$ offen.

b), c) Übg. (Etwas einfacher für metrische Räume.) $\square$

2.11 z.B.: (i) (a,b) ist offen in $\mathbb{R}$ (mit Standardmetrik $d(x,y)=|x-y|$),

Für $x\in(a,b)$ setze $\varepsilon := \min\{x-a,\, b-x\} > 0$; [denn $a\neq x\neq b$]

dann gilt $B(x,\varepsilon) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset (a,b)$.



(a,∞), $(-\infty,b) \subset \mathbb{R}$ sind ebenfalls offen. [Warum?]

(ii) $[a,b) \subset$ ist nicht offen (für $a<b$):

Für $a \in [a,b)$ existiert kein $\varepsilon>0$ mit

$B(a,\varepsilon) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset [a,b)$ ($a-\frac{\varepsilon}{2} \in B(a,\varepsilon)$, aber $a-\frac{\varepsilon}{2} \notin [a,b)$).

(iii) $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ist nicht offen (für $a\le b$); s. (ii).

$[a,b]$ ist abgeschlossen, denn

$$[a,b] = \mathbb{R} \setminus \underbrace{\big(\underbrace{(-\infty,a)}_{\text{offen}} \cup \underbrace{(b,\infty)}_{\text{offen}}\big)}_{\text{offen}}.$$

(iv) $(a,b] \subset \mathbb{R}$ (für $a<b$) ist weder offen noch abgeschlossen (betrachte $a \in \mathbb{R}\setminus(a,b]$ und argumentiere wie in (ii)).

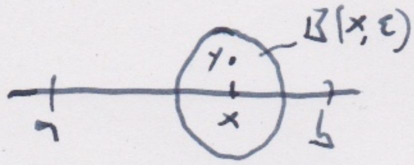
(v) $\mathbb{N}, \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ sind abg. [Warum?]

$\{\frac{1}{n} \mid n=1,2,\dots\} \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$ ist abg. [Warum?]

$\{\frac{1}{n} \mid n=1,2,\dots\} \subset \mathbb{R}$ ist weder offen noch abg. [Warum?]

(vi) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ist weder offen noch abg. [Warum?]

(vii) $(a,b) \subset \mathbb{C}$ (mit Standardmetrik) ist nicht offen:



$y := x + i \cdot \frac{\varepsilon}{2} \in B(x,\varepsilon)$, $y \notin (a,b)$

(viii) Betrachte $[a,b)$ als metrischen Unterraum von $\mathbb{R}$.
Dann ist $[d,b) \subset [a,b)$ abg. und $[a,d) \subset [a,b)$ offen. [Warum?]

(ix) Allgemeiner:
$(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum, $Y \subset X$, dann ist
$(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologischer Raum mit
$\mathcal{T}_Y := \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{T}\}$ $\left(= \{ V \subset Y \mid \exists\, U \in \mathcal{T} \text{ mit } V = U \cap Y \}\right)$.

(vii) und (viii) zeigen: $U \underset{\text{offen}}{\subset} Y \not\Rightarrow U \underset{\text{offen}}{\subset} X$.

(x) $(X, \mathcal{P}(X))$ ist ein topologischer Raum für jede Menge X
(diskrete Topologie); $\mathcal{P}(X)$ als Topologie wird induziert
von der diskreten Metrik.

(xi) Sei X eine Menge, dann ist $\{X, \emptyset\}$ eine Topologie
(i.a. nicht induziert von einer Metrik).

(xii) Für $\mathbb{C}$ mit Standardmetrik gilt
$\partial B(0,1) = S^1 = \{z \mid |z| = 1\}$, $\overline{B(0,1)} = \overline{B}(0,1)$.

(xiii) Für $\mathbb{R}$ mit Standardmetrik gilt $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$.

2.12 Def.: Sei (X, d) ein metrischer Raum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine Folge.

Wir sagen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $x \in X$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, falls gilt:

(*) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : d(x, x_n) < \varepsilon$.

Äquivalent:

(**) $d(x, x_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

(***) Zu jeder Umgebung U von x existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U$ für $n \geq N$.

[Warum?]

2.13 Def.: Sei (X, d) ein metrischer Raum.

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ heißt Cauchyfolge, falls gilt:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N : d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

2.14 Bem.: Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge.

Bew.: Sei $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Zu $\varepsilon > 0$ wähle $N \in \mathbb{N}$ $d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ falls $n \geq N$.

Für $n, m \geq N$ gilt dann

$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. $\square$

2.15 <u>Def.</u>: Ein metrischer Raum heißt vollständig, falls in ihm jede Cauchyfolge konvergiert.

2.16 <u>Def.</u>: Ein vollständig normierter Vektorraum heißt Banachraum.

2.17 <u>Prop.</u>: Sei (X,d) ein metrischer Raum, $A \subset X$.

Dann sind äquivalent:

(i) $A \underset{\text{abg.}}{\subseteq} X$

(ii) Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$, welche in X konvergiert, gilt $\lim_{n\to\infty} x_n \in A$.

Bew.: (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $(x_n)_{\mathbb{N}} \subset A$ konvergent in X; setze $\bar{x} := \lim_{n\to\infty} x_n$.

Falls $\bar{x} \in X \setminus A \underset{\text{off.}}{\subseteq} X$, so existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in X \setminus A$ für $n \geq N$ (nach 2.12 (i)$\Leftrightarrow$(iv)). $\lightning$

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sei $x \in X \setminus A$.

Z.z.: $\exists\, \varepsilon > 0 : B(x,\varepsilon) \cap A = \emptyset$.

Falls nicht, so existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in A$ mit $d(x,x_n) < \frac{1}{n+1}$.

Wir haben dann $(x_n)_{\mathbb{N}} \subset A$ mit $d(x,x_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, also $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ nach 2.12 (i)$\Leftrightarrow$(ii).

Nach (ii) gilt dann $x \in A$, $\lightning$. $\square$

2.18 <u>Prop.:</u> Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum.
Sei $A_0 \supset A_1 \supset \dots$ eine absteigende Folge nichtleerer abgeschlossener Teilmengen mit $\operatorname{diam}(A_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (wo $\operatorname{diam} A_n := \sup\{d(x,y) \mid x,y \in A_n\}$).
Dann gibt es genau einen Punkt in $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Bew.: Für $n \in \mathbb{N}$ wähle $x_n \in A_n$.
Falls $\varepsilon > 0$, wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{diam}(A_n) < \varepsilon$ falls $n \geq N$;
dann gilt $d(x_n, x_m) \leq \operatorname{diam}(A_N) < \varepsilon$ falls $n,m \geq N$.

$\Rightarrow$ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge.

$\overset{(X,d)\text{ vollst.}}{\Rightarrow}$ $\bar{x} := \lim_{n\to\infty} x_n \in X$ existiert.

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt $(x_n)_{n\in\mathbb{N},\, n\geq k} \subset A_k \overset{2.17}{\Rightarrow} \bar{x} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\geq k}} x_n \in A_k$.

$\Rightarrow$ $\bar{x} \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Sei $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ein weiterer Punkt, dann gilt
$$d(\bar{x}, y) \leq \operatorname{diam}(A_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0, \quad \text{also } \bar{x} = y. \qquad \square$$

<u>Bem.:</u> Alle Voraussetzungen in 2.18 sind wesentlich (Übung).

2.19 Propos.: Betrachte $(\mathbb{R}^n, d_2)$, wo d_2 die Standardmetrik (induziert durch $\|\cdot\|_2$) ist.

Sei $(\underline{x}_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_k = (x_{k,1}, \dots, x_{k,n})$ und

$\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

$$\lim_{k\to\infty} \underline{x}_k = \underline{x} \iff \lim_{k\to\infty} x_{k,i} = x_i \text{ für } i = 1, \dots, n.$$

Beweis: $\Rightarrow$: Für $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt

$$|x_{k,i} - x_i| = \left(|x_{k,i} - x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\sum_{j=1}^n |x_{k,j} - x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} = d_2(\underline{x}_k, \underline{x}) \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

$\Leftarrow$: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

Für $i \in \{1, \dots, n\}$ ex. $N_i \in \mathbb{N}$ mit $|x_{k,i} - x_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ falls $k \ge N_i$.

Setze $N := \max\{N_i \mid i = 1, \dots, n\}$, dann gilt für $k \ge N$:

$$d_2(\underline{x}_k, \underline{x}) = \left(\sum_{i=1}^n |x_{k,i} - x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \left(\sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon.$$

□

2.20 Cor.: $(\mathbb{R}^n, d_2)$ ist vollständig.

Bew.: Sei $(\underline{x}_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ Cauchyfolge.

Es gilt $\|\underline{x}_k - \underline{x}_\ell\|_2 \ge |x_{k,i} - x_{\ell,i}|$, $i = 1, \dots, n$, daher ist $(x_{k,i})_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ Cauchyfolge.

$\mathbb{R}$ ist vollständig $\Rightarrow$ $(x_{k,i})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$

$\overset{2.19}{\Rightarrow}$ $(\underline{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

□