11 Anwendungen

"In der Welt geschieht nichts, worin man nicht den Sinn eines bestimmten Maximums oder Minimums erkennen könnte" Leonhard Euler

11.1 Zu einem physikalischen (mechanischen) System assoziiert man eine sog. Lagrangefunktion

$$L : [a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
$$\begin{pmatrix} t \\ q \\ p \end{pmatrix} \longmapsto L\begin{pmatrix} t \\ q \\ p \end{pmatrix}.$$

Dabei ist z.B. t die Zeit, q der Ort (eines Teilchens) und p seine Geschwindigkeit (bzw. sein Impuls). Für $q(a)$, $q(b)$ sind oft Randbedingungen vorgegeben.

Das Prinzip der kleinsten Wirkung besagt, dass für einen physikalischen Zustand die Größe

$$S(q) = \int_a^b L\begin{pmatrix} t \\ q(t) \\ \dot q(t) \end{pmatrix} dt$$

minimal ist.

Problem: Finde Bedingungen an q dafür, dass $S(q)$ minimal ist.

10.2 Satz (Euler-Lagrange Gleichungen):

Sei $L : [a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $q : [a,b] \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar mit

$$S(q) = \inf \{ S(g) \mid g \in C^2([a,b]),\ g(a) = \alpha,\ g(b) = \beta \},$$

wo $S(.)$ definiert ist wie in 10.1.

Dann gilt

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial p} \begin{pmatrix} t \\ q(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix} \right) = \frac{\partial L}{\partial q} \begin{pmatrix} t \\ q(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix}.$$

Bew.: Für jedes $h \in C^2([a,b])$ mit

$$h(a) = h(b) = 0 \qquad (*)$$

gilt

$$S(q) \leq S(q + r \cdot h) = \int_a^b L \begin{pmatrix} t \\ q(t) + r \cdot h(t) \\ \dot{q}(t) + r \cdot \dot{h}(t) \end{pmatrix} dt$$

für $r \in \mathbb{R}$. Definiere $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $F(r) := S(q + r \cdot h)$.

F hat in 0 ein Minimum, also

$$\frac{dF}{dr}(0) = 0. \qquad (**)$$

Nach Satz 9.4 gilt

$$\frac{dF}{dv}(v) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial v} L\begin{pmatrix} t \\ q(t)+v\cdot h(t) \\ \dot q(t)+v\cdot \dot h(t)\end{pmatrix} dt$$

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial q}\begin{pmatrix} t \\ q(t)+v\cdot h(t) \\ \dot q(t)+v\cdot \dot h(t)\end{pmatrix}\cdot h(t) + \frac{\partial L}{\partial p}\begin{pmatrix} t \\ q(t)+v\cdot h(t) \\ \dot q(t)+v\cdot \dot h(t)\end{pmatrix}\cdot \dot h(t)\right) dt. \quad (***)$$

Partielle Integration liefert

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial p}\begin{pmatrix} t \\ q(t)+v\cdot h(t) \\ \dot q(t)+v\cdot \dot h(t)\end{pmatrix}\cdot \dot h(t)\, dt = \frac{\partial L}{\partial p}\begin{pmatrix} t \\ q(t)+v\cdot h(t) \\ \dot q(t)+v\cdot \dot h(t)\end{pmatrix}\cdot h(t)\Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial p}\begin{pmatrix} t \\ q(t)+v\cdot h(t) \\ \dot q(t)+v\cdot \dot h(t)\end{pmatrix}\right) h(t)\, dt$$

$$\overset{(*)}{=} -\int_a^b \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial p}\begin{pmatrix} t \\ q(t)+v\cdot h(t) \\ \dot q(t)+v\cdot \dot h(t)\end{pmatrix}\right)\cdot h(t)\, dt. \quad (****)$$

Damit gilt

$$0 \overset{(**)}{=} \frac{dF}{dv}(0) \overset{(***),(****)}{=} \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial q}\begin{pmatrix} t \\ q(t)+0\cdot h(t) \\ \dot q(t)+0\cdot \dot h(t)\end{pmatrix} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial p}\begin{pmatrix} t \\ q(t)+0\cdot h(t) \\ \dot q(t)+0\cdot \dot h(t)\end{pmatrix}\right)\right)\cdot h(t)\, dt.$$

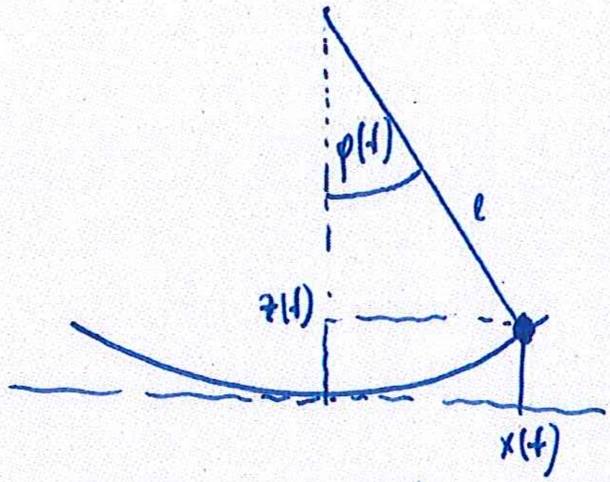
$h \in C^1([a,b])$ mit $(*)$ beliebig

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial q}\begin{pmatrix} t \\ q(t) \\ \dot q(t)\end{pmatrix} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial p}\begin{pmatrix} t \\ q(t) \\ \dot q(t)\end{pmatrix} = 0.$$

[dabei benutzt:
$f \in C([a,b])$ mit $\int_a^b f(t)\,h(t)\,dt = 0$ für jedes $h \in C^1([a,b])$ mit $(*)$
$\Rightarrow f \equiv 0$.
$f \not\equiv 0$:  wähle $h \rightsquigarrow \int_a^b f(t)\cdot h(t) > 0$ ↯]

□

11 ~~10~~.3 Ebenes Pendel



Potentielle Energie:

$$E_{pot} = m \cdot g \cdot z(t) = m \cdot g \cdot l \cdot (1 - \cos\varphi(t))$$

Masse Erdbeschleunigung

Kinetische Energie:

$$E_{kin} = \frac{m}{2} \cdot \left(\dot z(t)^2 + \dot x(t)^2\right) = \frac{m}{2} l^2 \dot\varphi(t)^2$$

$$L = E_{kin} - E_{pot} = \frac{m}{2} l^2 \dot\varphi(t)^2 + m g l \cos\varphi(t) - m g l$$

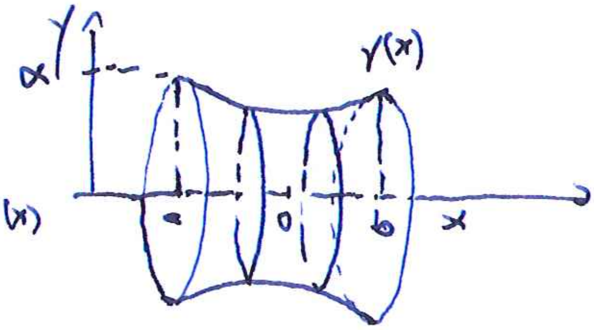
ist die Lagrangefunktion und

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\begin{pmatrix} t \\ \varphi(t) \\ \dot\varphi(t)\end{pmatrix}\right) = \frac{d}{dt}\left(m l^2 \dot\varphi(t)\right) = m l^2 \ddot\varphi(t),$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi}\begin{pmatrix} t \\ \varphi(t) \\ \dot\varphi(t)\end{pmatrix} = - m g l \sin\varphi(t)$$

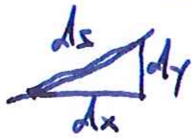
10.1, 10.2 $\Rightarrow$ Für eine Pendelbewegung gilt $m l^2 \ddot\varphi(t) = - m g l \sin\varphi(t)$.
Für kleine φ ist $\sin\varphi(t) \approx \varphi(t)$ (Taylor), also
$\ddot\varphi(t) = -\frac{g}{l}\varphi(t)$. Lösungen sind von der Form
$\varphi(t) = \lambda \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t\right) + \mu \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t\right)$. ~~[illegible]~~

11.4 Eine Minimalfläche



Die Rotationsfläche zur Kurve $y(x)$ beschreibt den Flächeninhalt

$$S(y) = 2\pi \int_a^b y(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx$$



(Aus III).

$\boxed{\text{Herleitung: Umfang bei } x = 2\pi y(x)\text{; Fläche über } dx = 2\pi y(x)\cdot ds\text{, wo } ds = \sqrt{1+\left(\tfrac{dy}{dx}\right)^2}\cdot dx = \sqrt{1+y'^2}\cdot dx}$

Problem: Minimiere $S(y)$.

Lagrangefunktion $\begin{pmatrix} x \\ q \\ p \end{pmatrix} \mapsto L(q,p) = q\sqrt{1+p^2}$

Euler-Lagrange: Für eine Kurve q mit minimaler Rotationsfläche gilt:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial p}\begin{pmatrix} q(x) \\ q'(x) \end{pmatrix}\right) \overset{!}{=} \frac{\partial L}{\partial q}\begin{pmatrix} q(x) \\ q'(x) \end{pmatrix}} \qquad (*)$$

$$\| $$

$$\frac{\partial L}{\partial p\,\partial q}\begin{pmatrix} q(x) \\ q'(x) \end{pmatrix}\cdot q'(x) + \frac{\partial L}{\partial p\,\partial p}\begin{pmatrix} q(x) \\ q'(x) \end{pmatrix}\cdot q''(x)$$

Berechne $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial p}\begin{pmatrix} q(x) \\ q'(x) \end{pmatrix} q'(x) - L\begin{pmatrix} q(x) \\ q'(x) \end{pmatrix}\right)$

$$= \frac{\partial L}{\partial p\,\partial q}\begin{pmatrix} q(x) \\ q'(x) \end{pmatrix}\cdot q'(x)^2 + \frac{\partial L}{\partial p\,\partial p}\begin{pmatrix} q(x) \\ q'(x) \end{pmatrix} q'(x)\, q''(x) + \frac{\partial L}{\partial p}\begin{pmatrix} q(x) \\ q'(x) \end{pmatrix} q''(x)$$

$$- \frac{\partial L}{\partial q}\begin{pmatrix} q(x) \\ q'(x) \end{pmatrix}\cdot q'(x) - \frac{\partial L}{\partial p}\begin{pmatrix} q(x) \\ q'(x) \end{pmatrix} q''(x) = q'(x)\cdot\left[\frac{\partial L}{\partial p\,\partial q}\cdot q' + \frac{\partial L}{\partial p\,\partial p}\, q'' - \frac{\partial L}{\partial q}\right] \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{\partial L}{\partial p}\begin{pmatrix} q \\ q' \end{pmatrix} \cdot q' - L\begin{pmatrix} q \\ q' \end{pmatrix}\right) \text{ ist konstant,}$$

$$\|$$

$$-\left(q \cdot 2q' \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+q'^2}} \cdot q' - q\sqrt{1+q'^2}\right)$$

$$\|$$

$$-\left(q \cdot \frac{q'^2 - (1+q'^2)}{\sqrt{1+q'^2}}\right)$$

$$\|$$

$$= \frac{q}{\sqrt{1+q'^2}} ,$$

d.h. $\frac{q}{\sqrt{1+q'^2}} = c \quad (**)$ für ein $c \in \mathbb{R}_+$.

Für unser L erhalten wir aus $(*)$

$$\frac{d}{dx}\left(q(x) \frac{q'(x)}{\sqrt{1+q'(x)^2}}\right) - \sqrt{1+q'(x)^2} = 0$$

$$\| \; (**)$$

$$\frac{d}{dx}\left(c \cdot q'(x)\right) = \frac{q(x)}{c} ,$$

d.h. $q''(x) = \frac{q(x)}{c^2}$ muss für q gelten!

$\Rightarrow \boxed{q(x) = c \cdot \cosh \frac{1}{c} \cdot x}$ $\rightsquigarrow$ Die Minimalfläche wird durch die Kettenlinie beschrieben!

Endet hier.