10. Gewöhnliche Differentialgleichungen

"The rate of increase of inflation is going down!"

Richard Nixon

10.1 Motivation: In Kapitel 8 haben wir Gleichungen der Form

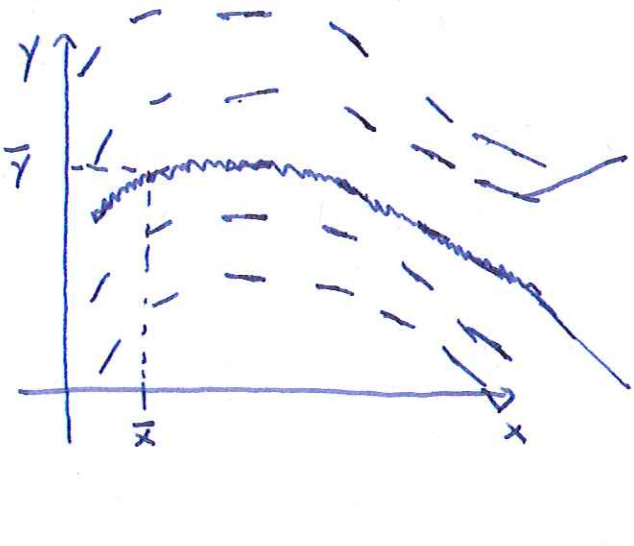
$$\underline{0} = F\begin{pmatrix} x \\ \underline{y}(x) \end{pmatrix}$$

nach $\underline{y}$ aufgelöst.

Wir betrachten nun DGL 1. Ordnung

$$\underline{y}' = F\begin{pmatrix} x \\ \underline{y}(x) \end{pmatrix}.$$

Betrachte z.B. $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

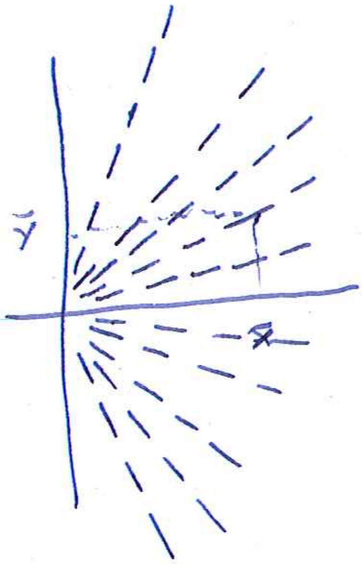


$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ = Steigung im Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

"Richtungsfeld"

Lösung $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
mit Anfangswert $g(\bar{x}) = \bar{y}$.

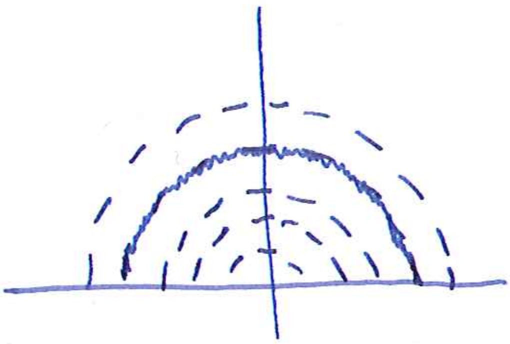
10.2 z.B.: (i) $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{y}{x}$:

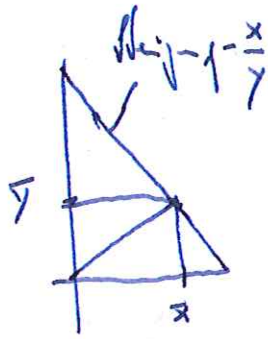


$$y' = \frac{y}{x}$$

besitzt Lösungen $g(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$.

(ii) $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\frac{x}{y}$





$$y' = -\frac{x}{y}$$

besitzt Lösungen $g(x) = \sqrt{b - x^2}$, $|x| < b$, $b > 0$.

10.3 Def.: Sei $U \subset \mathbb{R}^2$, $F : U \to \mathbb{R}$ stetig. Dann heißt

$$y' = F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (*)$$

gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung.

Eine Lösung zum Anfangswert $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \in U$ über dem Intervall I ist eine differenzierbare Funktion $g : I \to \mathbb{R}$ mit

a) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ g(x) \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in I \right\} \subset U$

b) $g'(x) = F\begin{pmatrix} x \\ g(x) \end{pmatrix}$, $x \in I$

c) $g(\bar{x}) = \bar{y}$.

10.4 <u>Bem.:</u> (*) lässt sich auch schreiben als Integralgleichung

$$y(x) = \bar{y} + \int_{\bar{x}}^{x} F\begin{pmatrix} t \\ y(t) \end{pmatrix} dt.$$

10.5 <u>Def.:</u> Sei $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $F : U \to \mathbb{R}$ stetig.

Dann heißt $y^{(n)} = F\begin{pmatrix} x \\ y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$ (**) DGL n-ter Ordnung.

Eine Lösung zum Anfangswert $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y}_0 \\ \vdots \\ \bar{y}_{n-1} \end{pmatrix} \in U$ ist eine auf dem Intervall I definierte n-mal differenzierbare Funktion $g : I \to \mathbb{R}$ mit

a) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ g(x) \\ g'(x) \\ \vdots \\ g^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \middle| x \in I \right\} \subset U$

b) $g^{(n)}(x) = F\begin{pmatrix} x \\ g(x) \\ \vdots \\ g^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}, \quad x \in I$

c) $\begin{pmatrix} g(\bar{x}) \\ g'(\bar{x}) \\ \vdots \\ g^{(n-1)}(\bar{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{y}_0 \\ \vdots \\ \bar{y}_{n-1} \end{pmatrix}.$

10.6 Bem.: Mit $\underline{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$, $\underline{F}\begin{pmatrix} x \\ \underline{y} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ F\begin{pmatrix} x \\ \underline{y} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

kann man (**) auch schreiben als

$$\underline{y}' = \underline{F}\begin{pmatrix} x \\ \underline{y} \end{pmatrix} \quad (\ast\ast\ast)$$

oder als System von n DGL 1. Ordnung

$$\begin{aligned} y_0' &= y_1 \\ y_1' &= y_2 \\ &\vdots \\ y_{n-2}' &= y_{n-1} \\ y_{n-1}' &= F\begin{pmatrix} x \\ y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\ast\ast\ast\ast)$$

Dann ist g Lösung von (**) genau dann wenn

$\begin{pmatrix} g \\ g' \\ \vdots \\ g^{(n-1)} \end{pmatrix}$ Lösung von (***) ist.

10.7 z.B.: Bewegungsgleichung $m\ddot{x} = F\begin{pmatrix} t \\ x \\ \dot{x} \end{pmatrix}$

Masse

Beschleunigung

Kraft abhängig von Zeit t, Ort $x(t)$, Geschwindigkeit $\dot{x}(t)$

10.8 Def.: Sei $U \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, $\underline{F}: U \to \mathbb{R}^n$, $\binom{x}{\underline{y}} \mapsto \underline{F}\binom{x}{\underline{y}}$.

$\underline{F}$ erfüllt eine Lipschitz Bedingung bzgl. $\underline{y}$ mit Konstante L, falls für $\binom{x}{\underline{y}}, \binom{x}{\underline{\tilde{y}}} \in U$ gilt

$$\left\|\underline{F}\binom{x}{\underline{y}} - \underline{F}\binom{x}{\underline{\tilde{y}}}\right\|_2 \le L\,\|\underline{y}-\underline{\tilde{y}}\|_2 .$$

$\underline{F}$ ist lokal Lipschitz bzgl. $\underline{y}$, falls für jeden Punkt $\binom{a}{\underline{b}} \in U$ eine Umgebung $V \subset U$ existiert so dass $\underline{F}|_V$ Lipschitz bzgl. $\underline{y}$ mit Konstante L_V ist.

10.9 Prop.: Sei $U \underset{\text{off}}{\subseteq} \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ und $\underline{F}: U \to \mathbb{R}^n$ stetig partiell differenzierbar bzgl. $\underline{y}$.

Dann ist $\underline{F}$ lokal Lipschitz bzgl. $\underline{y}$.

Beweis: Sei $\binom{a}{\underline{b}} \in U$. Wähle $r>0$ so dass

$$V := \left\{\binom{x}{\underline{y}} \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \;\middle|\; |x-a| \le r,\ \|\underline{y}-\underline{b}\|_2 \le r\right\} \subset U,$$

dann ist V kompakte Umgebung von $\binom{a}{\underline{b}}$.

Es ist $\frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{y}}: U \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ stetig, ebenso wie $\left\|\frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{y}}(.)\right\|: U \to \mathbb{R}_+$.

Aber dann gilt $L := \sup\left\{\left\|\frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{y}}\binom{x}{\underline{y}}\right\| \;\middle|\; \binom{x}{\underline{y}} \in V\right\} < \infty$.

$$\underset{\text{(für jedes feste } x)}{\overset{\text{MWS 7.11}}{\Longrightarrow}} \left\|\underline{F}\binom{x}{\underline{y}} - \underline{F}\binom{x}{\underline{\tilde{y}}}\right\|_2 \le L\,\|\underline{y}-\underline{\tilde{y}}\|_2 .$$

$\square$

10.10 __Satz__ (Eindeutigkeit): Sei $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $\underline{F} : U \to \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz bzgl. $\underline{y}$.

Seien $\underline{g}, \underline{h} : I \to \mathbb{R}^n$ zwei Lösungen der DGL

$$\underline{y}' = \underline{F}\begin{pmatrix} x \\ \underline{y} \end{pmatrix}$$

über dem Intervall I.

Falls $\underline{g}(\bar{x}) = \underline{h}(\bar{x})$ für ein $\bar{x} \in I$, so folgt $\underline{g} = \underline{h}$.

Beweis a) Falls $\underline{g}(a) = \underline{h}(a)$ für ein $a \in I$, so ex. $\varepsilon > 0$ mit $\underline{g}(x) = \underline{h}(x)$ für alle $x \in I$ mit $|x-a| \leq \varepsilon$.

Beweis: Wir integrieren $\underline{g}'(x) = \underline{F}\begin{pmatrix} x \\ \underline{g}(x) \end{pmatrix}$ und $\underline{h}'(x) = \underline{F}\begin{pmatrix} x \\ \underline{h}(x) \end{pmatrix}$

und erhalten wegen $\underline{g}(a) = \underline{h}(a)$

$$\underline{g}(x) - \underline{h}(x) = \int_a^x \left(\underline{F}\begin{pmatrix} t \\ \underline{g}(t) \end{pmatrix} - \underline{F}\begin{pmatrix} t \\ \underline{h}(t) \end{pmatrix} \right) dt.$$

$\underline{F}$ lokal Lipschitz bzgl. $\underline{y}$ $\Rightarrow \exists\, \delta_a > 0,\ L_a \geq 0$ mit

$$\left\| \underline{F}\begin{pmatrix} t \\ \underline{g}(t) \end{pmatrix} - \underline{F}\begin{pmatrix} t \\ \underline{h}(t) \end{pmatrix} \right\|_2 \leq L_a \| \underline{g}(t) - \underline{h}(t) \|_2 \text{ falls } t \in [a-\delta_a, a+\delta_a].$$

$$\Rightarrow \| \underline{g}(x) - \underline{h}(x) \|_2 \leq L_a \cdot \int_a^x \| \underline{g}(t) - \underline{h}(t) \|_2 \, dt.$$

Setzen $M(x) := \sup\{\|g(t)-h(t)\|_2 \mid t\in I,\ x\le t\le a \text{ oder } a\le t\le x\} < \infty$

dann gilt für $z\in I$ mit $|z-a|\le|x-a|\le\delta_a$

$$\|g(z)-h(z)\|_2 \le L_a\cdot|z-a|\cdot M(z)\le L_a\cdot|x-a|\cdot M(x).$$

$\Rightarrow$ $M(x)\le L_a\cdot|x-a|\cdot M(x)$ falls $|x-a|\le\delta_a$, $x\in I$.

Setzen $\varepsilon := \min\{\delta_a, \frac{1}{2L_a}\}$, dann gilt für $x\in I$ mit $|x-a|\le\varepsilon$:

$$M(x)\le L_a\cdot\frac{1}{2L_a}\cdot M(x)=\frac{1}{2}M(x),$$

also $M(x)=0$.

$\Rightarrow$ $g(x)=h(x)$ falls $|x-a|\le\varepsilon$.

b) Setzen $x_1 := \sup\{x\in I \mid g|_{[\bar{x},x]} = h|_{[\bar{x},x]}\}$.

Falls x_1 ($=\infty$ erlaubt) gleich dem rechten Intervallende von I, so gilt $g(x)=h(x)$ für alle $x\in I$ mit $x\ge\bar{x}$.

Falls nicht, so existiert $\delta>0$ mit $[x_1, x_1+\delta]\subset I$.

g, h stetig $\Rightarrow$ $g(x_1)=h(x_1)$.

a) $\Rightarrow$ $\exists\ \varepsilon>0$ mit $g(x)=h(x)$ falls $x\in I$, $|x-x_1|\le\varepsilon$, $\lightning$ zur Def. von x_1

$\Rightarrow$ $g(x)=h(x)$ für alle $x\in I$ mit $x\ge\bar{x}$.

c) $g(x)=h(x)$ für alle $x\in I$ mit $x\le\bar{x}$ zeigt man analog. $\square$

10.11 <u>Existenzsatz von Picard-Lindelöf</u>: Sei $U \underset{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, $\underline{F} : U \to \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz bzgl. $\underline{y}$.
Dann existiert zu jedem $\binom{a}{\underline{b}} \in U$ ein $\varepsilon > 0$ und eine Lösung $\underline{g} : [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \to \mathbb{R}^n$ der DGL

$$\underline{y}' = \underline{F}\binom{x}{\underline{y}} \qquad (*)$$

mit der Anfangsbedingung $\underline{g}(a) = \underline{b}$.

Beweis: a) Es existiert $r > 0$, so dass

$$V := \left\{ \binom{x}{\underline{y}} \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \;\middle|\; |x-a| \leq r,\ \|\underline{y}-\underline{b}\|_2 \leq r \right\} \subset U$$

und so dass $\underline{F}|_V$ Lipschitz bzgl. $\underline{y}$ mit Konstante L ist.
V kompakt, $\underline{F}$ stetig $\Rightarrow \exists\, M \geq 0$ mit $\left\|\underline{F}\binom{x}{\underline{y}}\right\|_2 \leq M$ für alle $\binom{x}{\underline{y}} \in V$.
Setze $\varepsilon := \min\left\{ r, \frac{r}{M} \right\} > 0$ und $I := [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$.

b) $\underline{g} : I \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann Lösung von $(*)$ (mit Anfangsbedingung), wenn

$$\underline{g}(x) = \underline{b} + \int_a^x \underline{F}\binom{t}{\underline{g}(t)}\,dt\ , \quad x \in I \qquad (**)$$

(Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, vgl. 10.4).

c) Wir definieren nun induktiv Funktionen

$$\underline{g}_k : I \to \mathbb{R}^n, \quad k \in \mathbb{N}$$

mit

(i) $\underline{g}_0(x) := \underline{b}$, $x \in I$

(ii) $\underline{g}_{k+1}(x) := \underline{b} + \int_a^x \underline{F}(t, \underline{g}_k(t))\,dt$, $x \in I$.

Beh.: Die rechte Seite in (ii) ist wohldefiniert, denn

für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt: $\underline{g}_k : I \to \mathbb{R}^n$ ist stetig und

$$\|\underline{g}_k(x) - \underline{b}\|_2 \le r, \quad x \in I.$$

Bew.: Beh. $k = 0$: klar.

Sei die Beh. für ein $k \in \mathbb{N}$ bewiesen.

Dann folgt für $t \in I$ dass $(t \mapsto (t, \underline{g}_k(t)))$ eine stetige Abb. $I \to U$ ist $\Rightarrow$ die rechte Seite in (ii) wohldefiniert und stetig in x.

Für $x \in I$ gilt dann

$$\|\underline{g}_{k+1}(x) - \underline{b}\|_2 \le \int_a^x \|\underline{F}(t, \underline{g}_k(t))\|_2\,dt \le M|x-a| \le M\varepsilon \le r.$$

$\Rightarrow$ Beh.

d) Es gilt $\|\underline{g}_{k+1}(x) - \underline{g}_k(x)\|_2 \le M \cdot L_V^k \, \frac{|x-a|^{k+1}}{(k+1)!}$, $x \in I$.

IA $k=0$: $\|\underline{g}_1(x) - \underline{g}_0(x)\|_2 = \left\| \int_a^x \underline{F}\binom{t}{\underline{b}} \, dt \right\| \le M \cdot |x-a|$.

IS $k-1 \to k$: $\|\underline{g}_{k+1}(x) - \underline{g}_k(x)\|_2 = \left\| \int_a^x \left(\underline{F}\binom{t}{\underline{g}_k(t)} - \underline{F}\binom{t}{\underline{g}_{k-1}(t)} \right) dt \right\|_2$

$$\overset{\underline{F}\ \text{Lipschitz}}{\le} \int_a^x L_V \cdot \|\underline{g}_k(t) - \underline{g}_{k-1}(t)\|_2 \, dt$$

$$\overset{IV}{\le} \frac{M \cdot L_V^k}{k!} \int_a^x |t-a|^k \, dt$$

$$= M \cdot L_V^k \, \frac{|x-a|^{k+1}}{(k+1)!} .$$

e) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (\underline{g}_k - \underline{g}_{k-1})$ besitzt nach d) auf I die konvergente Majorante $M \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{L_V^{k-1} \cdot r^k}{k!}$, konvergiert also nach Ana I, Satz 14.5 absolut und gleichmäßig.

$\Rightarrow$ $\underline{g} := \lim_{k\to\infty} \underline{g}_k = \underline{b} + \sum_{k=1}^{\infty} (\underline{g}_k - \underline{g}_{k-1}) : I \to \mathbb{R}^n$ ist stetig.

Für $k \in \mathbb{N}$, $x \in I$ gilt

$$\left\| \underline{F}\binom{x}{\underline{g}(x)} - \underline{F}\binom{x}{\underline{g}_k(x)} \right\|_2 \le L_V \cdot \|\underline{g}(x) - \underline{g}_k(x)\|_2 ,$$

sodass $\left(x \mapsto \underline{F}\binom{x}{\underline{g}_k(x)}\right) \xrightarrow{k\to\infty} \left(x \mapsto \underline{F}\binom{x}{\underline{g}(x)}\right)$ gleichmäßig.

Ana I, Satz 14.6 $\Rightarrow$ $\underline{g}(x) = \lim_{k\to\infty} \underline{g}_{k+1}(x) = \underline{b} + \lim_{k\to\infty} \int_a^x \underline{F}\binom{t}{\underline{g}_k(t)} dt = \underline{b} + \int_a^x \lim_{k\to\infty} \underline{F}\binom{t}{\underline{g}_k(t)} dt = \underline{b} + \int_a^x \underline{F}\binom{t}{\underline{g}(t)} dt$

10.12 z.B.: Betrachte $y' = 2xy$, $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Gesucht: Lösung φ mit $\varphi(0) = y_0$.

Setze $\varphi_0(x) := y_0$, $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_{k+1}(x) := y_0 + \int_0^x 2t\, \varphi_k(t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\varphi_1(x) = y_0 + 2y_0 \int_0^x t\, dt = y_0 + y_0 x^2 = y_0(1+x^2).$$

$$\varphi_2(x) = y_0 + \int_0^x 2t\, y_0(1+t^2)\, dt = y_0 + y_0 x^2 + \frac{y_0 x^4}{2}$$

Induktion $\rightsquigarrow$

$$\varphi_k(x) = y_0\left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots + \frac{x^{2k}}{k!}\right),$$

also

$$\varphi(x) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = y_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!} = y_0\, e^{x^2}.$$

Corollar: $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f: G \to \mathbb{R}$ stetig und lokal Lipschitz.

10.13 (i) Sind $\varphi, \psi: I \to \mathbb{R}$ zwei Lösungen von

(*) $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$

über dem Intervall I. Falls für $x_0 \in I$ gilt

$\varphi(x_0) = \psi(x_0)$, $\varphi'(x_0) = \psi'(x_0)$, …, $\varphi^{(n-1)}(x_0) = \psi^{(n-1)}(x_0)$,

so ist $\varphi(x) = \psi(x)$ für $x \in I$.

(ii) Zu $(x_0, y_0, \dots, y_{n-1}) \in G$ existiert $\varepsilon > 0$ und eine Lösung $\varphi: [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \to \mathbb{R}$ von (*) mit $\varphi(x_0) = y_0, \dots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$.

Bew.: Folgt aus Bem. 10.6, Satz 10.10 und Satz 10.11.

10.14

7.B.1 Die Gleichung

(*) $\quad y'' = -y$

besitzt Lösungen $\cos x$, $\sin x$ auf $\mathbb{R}$.

Allgemeiner ist jede Funktion

(**) $\quad \varphi(x) = c_0 \cdot \cos x + c_1 \cdot \sin x$

Lösung mit $\varphi(0) = c_0$, $\varphi'(0) = c_1$.

Für jede andere Lösung ψ mit $\psi(0) = c_0$, $\psi'(0) = c_1$

gilt nach 10.10 $\psi = \varphi$ ($f(x,y) = -y$ ist Lipschitz bzgl. y).

$\Rightarrow$ jede Lösung von (*) ist von der Form (**).