Analysis II

1. Die Taylorformel

"Man merkt nie, was schon getan wurde, man sieht immer nur, was noch zu tun bleibt."

Marie Curie

1.1 Erinnerung: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ heißt Potenzreihe mit Mittelpunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und Koeffizienten $a_n \in \mathbb{C}$.

$r := \sup\{ |z-z_0| \mid z \in \mathbb{C}, \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \text{ konvergiert} \} \in [0,\infty]$

heißt Konvergenzradius.

Für $0 < \rho < r$ konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ absolut und gleichmäßig auf $\bar{B}(z_0, \rho)$; die ~~Reihe~~ Reihe konvergiert punktweise auf $\mathring{B}(z_0, r)$.

Die Funktion $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n : (z_0 - r, z_0 + r) \to \mathbb{R}$ ist unendlich oft differenzierbar mit $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$ und es gilt $a_n = \frac{1}{n!} \cdot f^{(n)}(z_0)$.

1.2 Satz (Taylorformel): Sei I ein Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar. Dann gilt für $x, x_0 \in I$

$$(*) \quad f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x-x_0)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n + R_{n+1}(x),$$

wo $R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt$.

Außerdem existiert ξ zwischen x und x_0 mit

$$(**) \quad R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}.$$

Bew.: IA $(n=0)$: $f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\, dt = R_1(x)$ nach Hauptsatz d. Diff.- und Integralrechnung.

IS $(n \to n+1)$: $(*)$ gelte für ein $n \in \mathbb{N}$.

Partielle Integration liefert

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} \underbrace{(x-t)^n}_{u'(t)} \underbrace{f^{(n+1)}(t)}_{v(t)}\, dt$$

$$= \frac{1}{n!} \cdot \frac{-1}{n+1} \cdot (x-t)^{n+1} f^{(n+1)}(t) \Big|_{x_0}^{x} - \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} \frac{-(x-t)^{n+1}}{n+1} \cdot f^{(n+2)}(t)\, dt$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} + R_{n+2}(x).$$

$\Rightarrow (*)$ für $n+1$.

$g(t) := (x-t)^n$ wechselt nicht das Vorzeichen zwischen x und x_0.

Mittelwertsatz der IR (Ana I, 13.13)

$\Rightarrow$ $\exists\, \xi$ zwischen x und x_0 mit

$$\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt \overset{I,\,13.13}{=} f^{(n+1)}(\xi)\cdot \int_{x_0}^{x} (x-t)^n\,dt$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n+1}\cdot (x-x_0)^{n+1}$$

$\Rightarrow$ (**).

$\square$

1.3 <u>Def.:</u> Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar; sei $x_0 \in I$.

$$T_f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

heißt Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt x_0.

1.4 <u>Bem.:</u> (i) Der Konvergenzradius von T_f ist nicht notwendig >0.

(ii) Auch wenn T_f konvergiert, gilt nicht immer $T_f(x) = f(x)$.

(iii) $T_f(x) = f(x)$ genau für die $x \in I$, für die $R_{n+1}(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ gilt. [Warum?]

(iv) Falls $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ gilt für $x \in I$, so ist $f(x) = T_f(x)$.
(Folgt aus Ana I, Satz 14.10, denn $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.)

1.5 z.B.: (i) $\exp(x) = T_{\exp}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}$

(ii) $\sin x = T_{\sin}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}$

$\cos x = T_{\cos}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}$

(iii) $$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad x \neq 0$$

$$f^{(k)}(x) = q_k(x) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad k \in \mathbb{N}, \ x \neq 0,$$

wo q_k ein rationale Funktion ist

$$\rightsquigarrow f^{(k+1)}(0) = \lim_{x \to 0} \frac{q_k(x) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} - f^{(k)}(0)}{x}$$

Induktion liefert $f^{(k+1)}(0) = 0, \ k \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow T_f \equiv 0 \neq f.$$