Übungen zur Analysis 2 **Blatt 12**
W. Winter, H. Thiel **SS 2018**

Abgabe Freitag, 13. Juli 2018, bis 8.15 Uhr in die jeweiligen Kästen.

Dieses Übungsblatt geht nicht mehr in die Klausurzulassung ein. Dennoch sind die Inhalte relevant für die Klausur. Das Blatt kann abgegeben werden um Zusatzpunkte zu erhalten. Die Lösungen werden nicht mehr in den Übungsgruppen besprochen. Stattdessen werden Musterlösungen zu den Aufgaben veröffentlicht.

Zusatzaufgabe 1 (4 Punkte)

Berechnen Sie die Integrale $\int_0^x te^{-t}dt$ und $\int_0^x t^2e^{-t}dt$.

(Hinweis: Differenzieren Sie das parameterabhängige Integral $F(y) = \int_0^x e^{-ty}dt$.)

Zusatzaufgabe 2 (4 Punkte)

Berechnen Sie das Volumen der dreidimensionalen Halbkugel wie folgt. Es sei $f\colon [-1,1]\times[-1,1] \to \mathbb{R}$ die stetige Funktion, welche gegeben ist durch:

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2-y^2}, & \text{falls } x^2+y^2 \leq 1 \\ 0, & \text{falls } x^2+y^2 > 1 \end{cases}.$$

Berechnen Sie das Doppelintegral $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x,y)dxdy$.

Zusatzaufgabe 3 (4 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale auf den angegebenen Bereichen.

(a) $\int_I (xy+y^2)d(x,y)$ mit $I = [0,1]\times[0,1]$.

(b) $\int_I \sin(x+y)d(x,y)$ mit $I = [0,\pi/2]\times[0,\pi/2]$.

(c) $\int_I \frac{x^2z^3}{1+y^2}d(x,y,z)$ mit $I = [0,1]\times[0,1]\times[0,1]$.

Zusatzaufgabe 4 (4 Punkte)

Wir betrachten eine Funktion $L(t,q,p)$, für $t \in [a,b]$ und $q,p \in \mathbb{R}$, die zweimal stetig partiell differenzierbar ist. Wir suchen eine differenzierbare Funktion $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, sodass $\int_a^b L(t,g(t),g'(t))dt$ maximal wird.

(a) Angenommen, L hängt nur von t und q ab. Zeigen Sie, dass jede Lösung g des Problems die Gleichung $\frac{\partial L}{\partial q}(t,g(t)) = 0$ erfüllt.

(b) Angenommen, L hängt nur von t und p ab. Zeigen Sie, dass jede Lösung g des Problems die Gleichung $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial p}(t,g(t)) = 0$ erfüllt, und damit $\frac{\partial L}{\partial p}(t,g(t))$ konstant ist.

(c) Angenommen, L hängt nur von q und p ab. Zeigen Sie, dass jede Lösung g des Problems die Gleichung $\frac{d}{dt}\left(L - g'\frac{\partial L}{\partial p}\right) = 0$ erfüllt.

Zusatzaufgabe 5 (4 Punkte)

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die in $I\times\mathbb{R}^n$ global einer Lipschitzbedingung mit der Konstanten L genügt. Weiter seien $\varphi,\psi\colon I \to \mathbb{R}^n$ zwei Lösungen der Differentialgleichung $y' = f(x,y)$. Es sei $a \in I$ und $\delta := \|\varphi(a)-\psi(a)\|$. Zeigen Sie, dass dann $\|\varphi(x)-\psi(x)\| \leq \delta e^{L|x-a|}$ für alle $x \in I$ gilt.