Zusatzaufgabe 1 (4 Punkte)

Berechnen Sie die Integrale $\int_0^x te^{-t}dt$ und $\int_0^x t^2e^{-t}dt$.

Mögliche Lösung:

Wir betrachten das parameterabhängige Integral $F(y) = \int_0^x e^{-ty}dt$. Einerseits gilt $F(y) = -y^{-1}e^{-ty}\big|_0^x = y^{-1}(1-e^{-xy})$ und damit:

$$F'(y) = y^{-2}((1+xy)e^{-xy}-1), \qquad F''(y) = y^{-3}(-(2+2xy+x^2y^2)e^{-xy}+2).$$

Andererseits gilt nach Satz 9.4:

$$F'(y) = \int_0^x -te^{-ty}dt, \qquad F''(y) = \int_0^x t^2e^{-ty}dt.$$

Damit ergibt sich:

$$\int_0^x te^{-t}dt = -F'(1) = -(1+x)e^{-x}+1.$$
$$\int_0^x t^2e^{-t}dt = F''(1) = -(2+2x+x^2)e^{-x}+2.$$

Zusatzaufgabe 2 (4 Punkte)

Berechnen Sie das Volumen der dreidimensionalen Halbkugel wie folgt. Es sei $f\colon [-1,1]\times[-1,1] \to \mathbb{R}$ die stetige Funktion, welche gegeben ist durch:

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2-y^2}, & \text{falls } x^2+y^2 \le 1 \\ 0, & \text{falls } x^2+y^2 > 1 \end{cases}.$$

Berechnen Sie das Doppelintegral $\int_{-1}^1\int_{-1}^1 f(x,y)dxdy$.

Mögliche Lösung:

Für ein festes $y \in [-1,1]$ gilt $\int_{-1}^1 f(x,y)dx = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}dx = \frac{\pi}{2}(1-y^2)$. Es folgt:

$$\int_{-1}^1\int_{-1}^1 f(x,y)dxdy = \int_{-1}^1 \frac{\pi}{2}(1-y^2)dy = \frac{\pi}{2}(y-\frac{1}{3}y^3)\Big|_{-1}^1 = \frac{2\pi}{3}.$$

Zusatzaufgabe 3 (4 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale auf den angegebenen Bereichen.

(a) $\int_I (xy + y^2) d(x,y)$ mit $I = [0,1] \times [0,1]$.

(b) $\int_I \sin(x+y) d(x,y)$ mit $I = [0,\pi/2] \times [0,\pi/2]$.

(c) $\int_I \frac{x^2 z^3}{1+y^2} d(x,y,z)$ mit $I = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$.

Mögliche Lösung:

(a)

$$\begin{aligned}\int_I (xy + y^2) d(x,y) &= \int_0^1 \left(\int_0^1 (xy + y^2) dx \right) dy = \int_0^1 \left(\frac{yx^2}{2} + y^2 x \Big|_0^1 \right) dy \\ &= \int_0^1 (\frac{y}{2} + y^2) dy = \frac{y^2}{4} + \frac{y^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{7}{12}.\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int_I \sin(x+y) d(x,y) &= \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\pi/2} \sin(x+y) dx \right) dy \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(-\cos(x+y)|_0^{\pi/2} \right) dy \\ &= \int_0^{\pi/2} (\cos(y) - \cos(y + \pi/2)) dy \\ &= (\sin(y) - \sin(y+\pi/2))|_0^{\pi/2} = 2.\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\int_I \frac{x^2 z^3}{1+y^2} d(x,y,z) &= \left(\int_0^1 x^2 dx \right) \left(\int_0^1 \frac{1}{1+y^2} dy \right) \left(\int_0^1 z^3 dz \right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{48}.\end{aligned}$$

Zusatzaufgabe 4 (4 Punkte)

Wir betrachten eine Funktion $L(t,q,p)$, für $t \in [a,b]$ und $q,p \in \mathbb{R}$, die zweimal stetig partiell differenzierbar ist. Wir suchen eine differenzierbare Funktion $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, sodass $\int_a^b L(t,g(t),g'(t))dt$ minimal wird.

(a) Angenommen, L hängt nur von t und q ab. Zeigen Sie, dass jede Lösung g des Problems die Gleichung $\frac{\partial L}{\partial q}(t,g(t)) = 0$ erfüllt.

(b) Angenommen, L hängt nur von t und p ab. Zeigen Sie, dass jede Lösung g des Problems die Gleichung $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial p}(t,g'(t)) = 0$ erfüllt, und damit $\frac{\partial L}{\partial p}(t,g'(t))$ konstant ist.

(c) Angenommen, L hängt nur von q und p ab. Zeigen Sie, dass jede Lösung g des Problems die Gleichung $\frac{d}{dt}\left(L - g'\frac{\partial L}{\partial p}\right) = 0$ erfüllt.

Mögliche Lösung:

(a) Nach Satz 11.2 erfüllt g die Euler-Lagrangesche Differentialgleichung $\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial p} = 0$. Nach Annahme gilt $\frac{\partial L}{\partial p} = 0$, und es folgt $\frac{\partial L}{\partial q} = 0$.

(b) Wie bei (a) gilt $\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial p} = 0$. Nach Annahme ist $\frac{\partial L}{\partial q} = 0$, und damit $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial p} = 0$.

(c) Wie bei (a) gilt $\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial p} = 0$ und damit:

$$\frac{\partial L}{\partial q} - g'\frac{\partial^2 L}{\partial q \partial p} - g''\frac{\partial^2 L}{\partial p^2} = 0.$$

Wir berechnen:

$$\frac{d}{dt}\left(L - g'\frac{\partial L}{\partial p}\right) = g'\frac{\partial L}{\partial q} + g''\frac{\partial L}{\partial p} - g''\frac{\partial L}{\partial p} - g'\left(g'\frac{\partial^2 L}{\partial q \partial p} + g''\frac{\partial^2 L}{\partial p^2}\right) = 0.$$

Zusatzaufgabe 5 (4 Punkte)

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die in $I \times \mathbb{R}^n$ global einer Lipschitzbedingung mit der Konstanten L genügt. Weiter seien $\varphi, \psi\colon I \to \mathbb{R}^n$ zwei Lösungen der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$. Es sei $a \in I$ und $\delta := \|\varphi(a) - \psi(a)\|$. Zeigen Sie, dass dann $\|\varphi(x) - \psi(x)\| \leq \delta e^{L|x-a|}$ für alle $x \in I$ gilt.

Mögliche Lösung:

Wir definieren $d\colon I \to \mathbb{R}_+$ durch $d(x) := \|\varphi(x) - \psi(x)\|$. Dann gilt

$$\begin{aligned} d(x) = \|\varphi(x) - \psi(x)\| &= \left\| \varphi(a) + \int_a^x \varphi'(t)dt - \left[\psi(a) + \int_a^x \psi'(t)dt\right] \right\| \\ &\leq \|\varphi(a) - \psi(a)\| + \int_a^x \|\varphi'(t) - \psi'(t)dt\|dt \\ &= \|\varphi(a) - \psi(a)\| + \int_a^x \|f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t))\|dt \\ &\leq \|\varphi(a) - \psi(a)\| + \int_a^x L\|\varphi(t) - \psi(t)\|dt \\ &\leq d(a) + \int_a^x Ld(t)dt. \end{aligned}$$

Für $x \geq a$ folgt $d'(x) \leq Ld(x)$. Für $x \leq a$ folgt $d'(x) \leq -Ld(x)$.
Falls $d(x) = 0$ für ein $x \in I$, dann folgt wegen der Eindeutigkeit der Lösung (Satz 10.10) schon $\varphi = \psi$ und damit auch $\|\varphi(x) - \psi(x)\| = 0 \leq \delta e^{L|x-a|}$. Wir können also annehmen, dass $d(x) > 0$ für alle $x \in I$.
Es folgt $\frac{d'(t)}{d(t)} \leq L$ für alle $t \geq a$; und $\frac{d'(t)}{d(t)} \leq -L$ für alle $t \leq a$.
Falls $x \geq a$, dann erhalten wir

$$\ln(d(x)) - \ln(d(a)) = \ln(d(t))|_a^x = \int_a^x \frac{d'(t)}{d(t)}dt \leq \int_a^x Ldt = L(x-a) = L|x-a|.$$

Falls $x \leq a$, dann gilt

$$\ln(d(a)) - \ln(d(x)) = \ln(d(t))|_x^a = \int_x^a \frac{d'(t)}{d(t)}dt \leq \int_x^a -Ldt = -L(a-x) = -L|x-a|.$$

In beiden Fällen erhalten wir

$$\ln(d(x)) \leq \ln(d(a)) + L|x-a|,$$

und damit

$$\|\varphi(x) - \psi(x)\| = d(x) = e^{\ln(d(x))} \leq e^{\ln(d(a)) + L|x-a|} = d(a)e^{L|x-a|} = \delta e^{L|x-a|},$$

was zu zeigen war.