Abgabe Freitag, 6. Juli 2018, bis 8.15 Uhr in die jeweiligen Kästen.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Welche Dose hat bei gleichem Volumen den geringsten Materialverbrauch? Betrachten Sie zylinderförmige Dosen der Höhe h mit kreisförmiger Grundfläche vom Radius r. Bestimmen Sie das Verhältnis von r und h, damit bei gegebenem Volumen die Oberfläche der Dose minimal ist.

(b) Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$h(x,y,z) = x^2 - y^2 + z,$$

unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetig partiell differenzierbare Funktion, und $p = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt an dem $\frac{\partial F}{\partial y}(p) \neq 0$. Zeigen Sie: Der Gradient von F bei p steht orthogonal auf der Höhenlinie durch p.
(Hinweis: Wegen $\frac{\partial F}{\partial y}(p) \neq 0$ lässt sich die Höhenlinie durch p lokal darstellen als Funktion $\gamma\colon (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ g(t) \end{pmatrix}$ für eine Funktion g.)

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass f überall lokal umkehrbar ist, aber nicht global.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Beweisen Sie, dass die im Satz 8.3 der Vorlesung gefundene implizite Funktion $g\colon V_1 \to V_2$ auf einer Umgebung $\tilde{V_1}$ von $\underline{a}$ *stetig* differenzierbar ist.

(Hinweis: Wählen Sie z.B. $\tilde{V_1} \subseteq V_1$ und $\tilde{V_2} \subseteq V_2$ so klein, dass $\frac{\partial f}{\partial \underline{y}}\begin{pmatrix} \tilde{\underline{a}} \\ \tilde{\underline{b}} \end{pmatrix}$ für alle $\tilde{\underline{a}} \in \tilde{V_1}$ und $\tilde{\underline{b}} \in \tilde{V_2}$ invertierbar ist. Wenden Sie dann z.B. Satz 8.3 für jeden Punkt $\begin{pmatrix} \tilde{\underline{a}} \\ g(\tilde{\underline{a}}) \end{pmatrix}$ mit $\tilde{\underline{a}} \in \tilde{V_1}$ an.)

Beispielaufgaben Klausur

Sie können die folgenden Aufgaben lösen und zur Korrektur einreichen. Die Aufgaben gehen jedoch nicht in die Klausurzulassung ein.

Beispielaufgabe 1 (Typ "Vokabelabfrage")

(a) Formulieren Sie, was es für eine Kurve $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ bedeutet, rektifizierbar zu sein.

(b) Sei (X,d) ein metrischer Raum. Wann heißt eine Teilmenge $W \subseteq X$ offen? Wann heißt eine Teilmenge abgeschlossen?

Beispielaufgabe 2 (Typ "Multiple-Choice")

Sei $\mathbb{R}^3$ versehen mit einer Norm und seien M_1, M_2 die Mengen

$$M_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 = 2y^2 + z^2\},$$
$$M_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 < 2y^2 + z^2\}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

☐ M_1 und M_2 sind beide abgeschlossen.

☐ M_1 ist kompakt.

☐ M_1 ist abgeschlossen und M_2 ist nicht kompakt.

Beispielaufgabe 3 (Typ "Rechnen")

Berechnen Sie die Taylorreihe der Funktion $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}$ im Entwicklungspunkt $x = 0$.

Beispielaufgabe 4 (Typ "Beweisen")

Beweisen Sie: Ist $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge der Cauchyfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im metrischen Raum (X,d) mit $x_{n_k} \to x$ für ein $x \in X$, so gilt auch $x_n \to x$.