Abgabe Freitag, 6. Juli 2018, bis 8.15 Uhr in die jeweiligen Kästen.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Welche Dose hat bei gleichem Volumen den geringsten Materialverbrauch?
Betrachten Sie zylinderförmige Dosen der Höhe h mit kreisförmiger Grundfläche vom Radius r. Bestimmen Sie das Verhältnis von r und h, damit bei gegebenem Volumen die Oberfläche der Dose minimal ist.

(b) Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$h(x,y,z) = x^2 - y^2 + z,$$

unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetig partiell differenzierbare Funktion, und $p = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt an dem $\frac{\partial F}{\partial y}(p) \neq 0$. Zeigen Sie: Der Gradient von F bei p steht orthogonal auf der Höhenlinie durch p.
(Hinweis: Wegen $\frac{\partial F}{\partial y}(p) \neq 0$ lässt sich die Höhenlinie durch p lokal darstellen als Funktion $\gamma\colon (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ g(t) \end{pmatrix}$ für eine Funktion g.)

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass f überall lokal umkehrbar ist, aber nicht global.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Ziel der Aufgabe ist es, den Fundamentalsatz der Algebra zu beweisen: Jedes Polynom (vom Grad ≥ 1) besitzt eine komplexe Nullstelle.

Sei $p(z) = z^k + a_{k-1}z^{k-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ ein Polynom mit Koeffizienten $a_{k-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}$. Es sei $a := |a_{k-1}| + \ldots + |a_1| + |a_0|$.

(a) Zeigen Sie: Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq \max\{1, 2a\}$ gilt $|p(z)| \geq a$.
(Hinweis: Betrachten Sie z.B. die Funktion $r(z) := \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_0}{z^k}$, sodass $p(z) = z^k(1 + r(z))$. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq \max\{1, 2a\}$ kann man zeigen, dass $|r(z)| \leq 1/2$, woraus $|p(z)| \geq a$ folgt.)

(b) Zeigen Sie: $|p(z)|$ nimmt auf $\mathbb{C}$ ein Minimum an.

(c) Zeigen Sie: Falls $|p(z_0)| \neq 0$, dann hat $|p|$ bei z_0 kein Minimum.
(Hinweis: Betrachten Sie z.B. das Polynom $q(z) = \frac{1}{p(z_0)} p(z_0 + z)$, welches von der Form $q(z) = 1 + bz^l + z^{l+1}\widetilde{q}(z)$ ist, für $b \neq 0$ und ein Polynom $\widetilde{q}$. Sei $\beta \in \mathbb{C}$, sodass $\beta^l = -b^{-1}$. Betrachten Sie dann das Polynom $r(z) = q(\beta z)$, welches von der Form $r(z) = 1 - z^l + z^{l+1}\widetilde{r}(z)$ ist, für ein Polynom $\widetilde{r}$. Es gibt eine Konstante $c \in (0, 1]$, sodass $|z^{l+1}\widetilde{r}(z)| < |z|^l$ für $z \in \mathbb{C}$ mit $0 < |z| < c$. Für $x \in (0, c)$ gilt dann $|r(x)| < 1$.)

Aus (b) und (c) folgt nun, dass es $z_0 \in \mathbb{C}$ gibt, wo $|p(z_0)| = 0$ und damit $p(z_0) = 0$ gilt.

Beispielaufgaben Klausur

Sie können die folgenden Aufgaben lösen und zur Korrektur einreichen. Die Aufgaben gehen jedoch nicht in die Klausurzulassung ein.

Beispielaufgabe 1 (Typ "Vokabelabfrage")

(a) Formulieren Sie den Abelschen Grenzwertsatz.

(b) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Wann heißt eine Teilmenge $W \subseteq X$ offen? Wann heißt eine Teilmenge abgeschlossen?

Beispielaufgabe 2 (Typ "Multiple-Choice")

Sei $\mathbb{R}^3$ versehen mit einer Norm und seien M_1, M_2 die Mengen

$$M_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 = 2y^2 + z^2\},$$
$$M_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 < 2y^2 + z^2\}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr:

☐ M_1 und M_2 sind beide abgeschlossen.

☐ M_1 ist kompakt.

☐ M_1 ist abgeschlossen und M_2 ist nicht kompakt.

Beispielaufgabe 3 (Typ "Rechnen")

Berechnen Sie die Taylorreihe der Funktion $f\colon (-1, 1) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}$ im Entwicklungspunkt $x = 0$.

Beispielaufgabe 4 (Typ "Beweisen")

Beweisen Sie: Ist $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge der Cauchyfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im metrischen Raum (X, d) mit $x_{n_k} \to x$ für ein $x \in X$, so gilt auch $x_n \to x$.