Übungen zur Analysis 2 **Blatt 10**
W. Winter, H. Thiel **SS 2018**

Abgabe Freitag, 29. Juni 2018, bis 8.15 Uhr in die jeweiligen Kästen.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Bestimmen Sie drei positive Zahlen a, b, c mit $a + b + c = 60$, sodass das Produkt abc maximal ist.

(b) Bestimmen Sie drei Zahlen a, b, c mit $a + b + c = 90$, sodass die Quadratsumme $a^2 + b^2 + c^2$ minimal ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Der Wirkungsverlauf W eines Medikaments auf einen Patienten wird oft durch die Gleichung $W(x, t) = x^2(a-x)t^2e^{-t}$ modelliert. Dabei ist $a \in (0, \infty)$ eine Konstante, $x \in [0, a]$ ist die Menge des eingenommenen Medikaments, und $t \in [0, \infty)$ ist der Zeitpunkt nach der Einnahme. Bestimmen Sie die Dosis $x \in (0, a)$ und den Zeitpunkt $t \in (0, \infty)$, sodass $W(x, t)$ maximal ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ nahe genug bei $(0, 0)$ kann man die Gleichung $e^{\sin(xy)} + x^2 - 2y - 1 = 0$ nach y auflösen, d.h., es gibt eine Abbildung $x \mapsto y = f(x)$, so dass $e^{\sin(xf(x))} + x^2 - 2f(x) - 1 = 0$.

(b) Es sei $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $F(x, y, z) = \begin{pmatrix} -2x^2 + y^2 + z^2 \\ x^2 + e^{y-1} - 2y \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass es auf einer genügend kleinen Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}$ von 1 stetig differenzierbare Funktionen $\varphi, \psi\colon U \to \mathbb{R}$ gibt, sodass $\varphi(1) = \psi(1) = 1$ und $F(x, \varphi(x), \psi(x)) = 0$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Wir betrachten das folgende lineare Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten:

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + \ldots a_{1n}x_n, \\ x_2' &= a_{21}x_1 + \ldots a_{2n}x_n, \\ \ldots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + \ldots a_{nn}x_n, \end{aligned}$$

wobei $x_1, \ldots, x_n$ jeweils stetig differenzierbare Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ sind.
Wir betrachten die Abbildung $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, und die Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$,

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Das lineare Differentialgleichungssystem lässt sich dann effizient schreiben als $x' = Ax$. Zeigen Sie, dass alle stetig differenzierbaren Lösungen des Systems $x' = Ax$ von der Form $t \mapsto e^{At}c$ sind, für einen konstanten Vektor $c \in \mathbb{R}^n$.

(Hinweis: Für eine Lösung v des Systems, betrachten Sie z.B. die Ableitung der Abbildung $t \mapsto e^{-At}v(t)$. Beachten Sie auch Aufgabe 4 von Blatt 09.)